MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI
DR. FAZEKAS FERENC

A. V.*

HATÁROZOTT INTEGRÁL
(ELSŐ RÉSZ)

ÍRTA
DR. FAZEKAS FERENC

NEGYEDIK KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1973

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI

DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS
DR. MATH. SC.

BELSŐ MUNKATÁRSAK

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI TANÁR
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORA

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

SZEMLÉLTETÉS

GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

1973

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI:

A.

A. I. Középiskolai matematika (Ötödik kiadás)
A. II. Egyváltozós elemi függvények (Harmadik kiadás)
A. III. Differenciálszámítás (Harmadik kiadás)
A. IV. Határozatlan integrál (Negyedik kiadás)
A. V.* Határozott integrál (Első rész) (Negyedik kiadás)
A. V.** Határozott integrál (Második rész)
A. VI. Többváltozós függvények és differenciálásuk (Negyedik kiadás)
A. VII. Többváltozós függvények integrálása (Negyedik kiadás)
A. VIII. Taylor-sorok (Harmadik kiadás)
A. IX. Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek (Negyedik kiadás)
A. X. A logarléc (Hatodik kiadás)

B.

B. I-II-III. Vektoranalízis. (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája. Skalár-, vektor- és tenzormezők) (Harmadik kiadás)
B. IV. Komplex függvénytan (Negyedik kiadás)
B. V. Numerikus és grafikus közelítő módszerek (Második kiadás)
B. VI. Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok (Harmadik kiadás)
B. VII.* Közönséges differenciálegyenletek. (Első rész) (Ötödik kiadás)
B. VII.** Közönséges differenciálegyenletek (Második rész) (Harmadik kiadás)
B. VIII. Parciális differenciálegyenletek (Második kiadás)

C.

C. I. Operátorszámítás. Speciális függvények (Második kiadás)
C. II. Variációszámítás (Harmadik kiadás)
C. III. Integrálegyenletek (Harmadik kiadás)
C. IV. Mátrixszámítás (Negyedik kiadás)
C. V. Valószínűségszámítás (Harmadik kiadás)
C. VI. Matematikai összefoglaló (Harmadik kiadás)
C. VII. Matematikai programozás (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

A. V.*

HATÁROZOTT INTEGRÁL

(ELSŐ RÉSZ)

ÍRTA

DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS
DR. MATH. SC.

KÖZREMŰKÖDÖTT

SZABÓ ISTVÁN
V. EGYETEMI TANÁRSEGÉD

Negyedik kiadás

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

KIADÁSÁT A MŰVELŐDÉSÜGYI MINISZTER RENDELTE EL

Az első kötet kéziratát átnézte

DR. GALLAI TIBOR
egyetemi tanár

A második kötet kéziratát átnézte:

DR. KÖRMENDI ISTVÁN
egyetemi adjunktus

Szaktanácsadó volt

DR. NAGY SÁNDOR †
egyetemi docens

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy, a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2-3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt Gjunter - Kuzmin időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt - magas színvonalára való tekintettel - elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták - a legmeggyőzőbben dr. Alexits akadémikus, professzor -, hogy műszaki egyetemeinken alkalmazott, műszaki matematikát oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő alkalmazott műszaki anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy Műszaki Matematikai Gyakorlatok című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével - egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

Munkánk A. és B. része* jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott kerethez képest egyeseket kibővítve, főleg a B. részben a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat C. része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink esetleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) célja gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a Mérnöki Továbbképző Intézet rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén újszerű szerkesztési elveket kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkoztunk, mint a legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: a) elméleti összefoglaló; b) bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapél-

*A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon:

da; c) az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; d) esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; e) esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között, f) végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült a rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az A. rész füzeteiben, professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákéhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A B. és C. rész füzeteiben - az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva - nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb forrásokból, sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem - példatárnál amúgy is szegényes sikert igérő - eredetiségre. Természetesen szép számú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása Gyurcsy Endre okl. villamosmérnök kolléga érdeme.

Ki kell emelnem Egerváry akadémikus, professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre Gallai professzor. Meg kell emlékeznem az Alkalmazott Matematikai Intézetről, mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Végezetül munkánkat műszaki egyetemeink oktatóinak és hallgatóinak ajánljuk. Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1. A SZERKESZTŐ

A SOROZAT MÁSODIK ÉS HARMADIK KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

Közel nyolc év munkájával - néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint - sikerült befejeznünk a Műszaki Matematikai Gyakorlatok c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a minisztérium és a Tankönyvkiadó kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekinthetjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak, 1958 nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus vezetősége kiállította, és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása. A második kiadású kötetek jó részének gyors elfogyása - éppen a matematikai programozás lineáris

algebrai segédeszközeivel, ill. a síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével kapcsolatos bővítése után - kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat fejlesztésére, korszerűsítésére 1958-ban kitűzött célok és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítések helyességét.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, az NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, az USA-ban, Angliában, az NSZK-ban) és nemzetközi fórumon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, ismét kérve ehhez a Művelődésügyi Minisztérium, a Tankönyvkiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk buzdító, áldozatkész támogatását.

Budapest, 1964. febr. 15. SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A középiskolai és a műegyetemi tanterv újabban végbement jelentős változása, valamint az elektronikus számítástechnika széles előretörése folytán ez évben megindulhatott az előző kiadások során a hazai műszaki olvasótáborban közismertté és kedveltté vált könyvsorozatunk alaposabb felfrissítésének és korszerűbbítésének több éves periódusa. Ez számos kötetünk kisebb-nagyobb átdolgozásával, egyesek bővítésével, esetleg szűkítésével és néhány, eddig is szorgalmazott új kötet megjelenésével fog megvalósulni Karaink és a Kiadó örvendetes támogatásával. Sorozatunk immár közel 2 évtizedes eleven életútja, gazdag oktatási és kutatási tapasztalataink, az olvasók és az illetékesek ügypártolása kellemessé teszi számunkra ezt a nagy munkát.

Lecturis salutem!

Budapest, 1971. május 15. DR. FAZEKAS FERENC

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

E kétkötetes könyv kitüntetett szerepet játszik sorozatunk A. részének kötetei között - több okból.

Először: a határozott integrál fogalma és néhány olyan geometriai alkalmazása, mint pl. a terület-, ívhossz-, térfogat-, felszín- és nyomaték-számítás stb. nálunk és külföldön egyaránt fontos részét képezi a műszaki felsőoktatás matematikai anyagának. Ezért ezt az anyagot könyvünkben alapos elméleti összefoglalókkal és nagyszámú, erősen rendszerezett példával tárgyaljuk.

Másodszor: a határozott integrál - differenciálelv, valamint (az A. IV. kötetben említett) legegyszerűbb differenciálegyenletek ismeretében - már számtalan apróbb műszaki részletprobléma, sok esetben egész problémák, sőt olykor széles műszaki problémakörök megoldására is alkalmas. E tényt meggyőzően szemlélteti könyvünkben a legkülönbözőbb műszaki tudományok területéről összegyűjtött gazdag példaanyag. Didaktikai és elvi szempontból egyaránt jelentős, hogy e műszaki példák a fentebb említett matematikai eszközöket szoros összefüggésükben mutatják meg, s ezek együttesét mint az elemi műszaki matematika leghathatósabb eszközét vésik az olvasó emlékezetébe. Megjegyzendő, hogy a szélesebb műszaki problémakörök feldolgozásánál szükségesnek látszott bővebb műszaki bevezetés előrebocsátása.

Harmadszor: könyvünk bizonyos fejezetei (mint pl. az improprius, a paraméteres és a Stieltjes-integrálról szóló) előre mutatnak, s a sorozat későbbi kötetei (B. III-VII.,

C. I-V.) számára kívánnak a határozott integrállal kapcsolatos további ismereteket nyújtani. E fejezetek gazdag példaanyaga egyébként szinte hézagpótló tankönyvirodalmunkban.

Mindezek következtében könyvünk eddigi köteteinknél nagyobb mértékben szolgálhatja a sorozat általános célkitűzéseit. (L. ezeket a sorozat előszavában.)

Néhány szót a szerkesztésről! Viszonylag nagy irodalmat tanulmányoztunk át (l. az irodalomjegyzéket). Hosszadalmas munkát igényelt (s bizonyára még így sem sikerült kifogástalanul) a sokfelől összegyűjtött anyag rendszerezése, egységes feldolgozása, nagyszámú példa átdolgozása és kiszámítása.

A források közül kiemeljük Fihtengolc gyakran idézett háromkötetes, ragyogó művét, melyből mind az elméleti bevezetők, mind a példák tekintetében bőven merítettünk, különösen három utolsó fejezetünkben. Jelentősen felhasználtuk továbbá elméleti, példa- és ábraanyag tekintetében Berman, Bermant, Gjunter - Kuzmin, Schlömilch, Granville, Rényi, Bojev, Muttnyánszky, Kövesi, Jablonszkij, Ivanov, Kalantarov - Nejman idézett műveit.

Viszonylag sokan voltak segítségemre a szerkesztés során. Közreműködött fáradhatatlan szorgalommal Szabó István tanársegéd az összegyűjtött anyag rendezésében, a kézirat előkészítésében és a korrektúrában. Gallai professzornak főleg az elméleti és példaanyag aránya, elrendezése, tárgyalásmódja és összefüggése tekintetében adott tanácsaiért, Körmendi adjunktusnak a matematikai és műszaki precizitást célzó számos megjegyzéséért, Nagy Sándor docensnek műszaki példáiért és hasznos észrevételeiért kell köszönetet mondanom. Ugyancsak köszönet illeti Aczél tv. docenst és Makai docenst az első kézirattal kapcsolatos megjegyzéseiért. Hock tanársegéd a víztagozat szaktárgyaiból gyűjtött példáiért, Gyurcsy okl. vill. mérnök a pontos és szemléletes ábrákért, Gedeon és Géher tanársegédek a segédanyag-fordításokért, Biczó tanársegéd a gépelési munkálatokért fogadják köszönetemet. Hálásan emlékezem meg az Oktatásügyi Minisztériumról és a Tankönyvkiadó Vállalatról a munka közben nyújtott állandó támogatásért és a könyv megjelenése érdekében hozott jelentős áldozatért. Az Egyetemi Nyomda most is elismerésre méltó munkával oldotta meg nagyigényű feladatát.

Budapest, 1953. nov. 15. FAZEKAS FERENC

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK, HARMADIK ÉS NEGYEDIK KIADÁSÁHOZ

A kötet három új kiadása lényegében megegyezik az elsővel. A szerző örömére szolgál, hogy a kötet gazdag műszaki alkalmazási anyaga révén - a leendő mérnökök újabb ezreit győzheti meg az integrálszámításnak mint matematikai segédeszköznek a műszaki tudományokban betöltött kimagasló szerepéről. E meggyőződés az olvasóban a folytatólagos kötet (A. V.**) figyelembevételével válhat még szilárdabbá.

Budapest, 1964. márc. 1., 1967. ápr. 15., 1971. máj. 15.

DR. FAZEKAS FERENC

E KÖTET
TARTALOMJEGYZÉKE

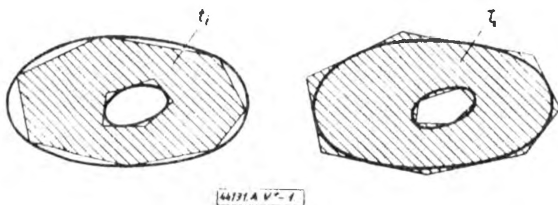
(ELSŐ RÉSZ)

1. §. A HATÁROZOTT INTEGRÁL

a) Területmérés

α) Tetszőleges alakú síkrész területe

Tetszőleges alakú síkrész területét közelítőleg belső vagy külső *közelítő sokszögek* segítségével számítjuk — tetszőleges pontossággal. A sokszögek területét — közismerten — háromszögrészeik területére vezetjük vissza. (Emlékezzünk a kör területének meghatározására.) Egy *korlátos* (vagyis egy négyzettel körülfogható) *síkrész pontosan csak akkor mérhető*, kvadrálható (azaz csak akkor jellemezhető egy meghatározott, véges területi mérőszámmal), *ha* a határátmenet során *a közelítő belső sokszögek* t_i *területi mérőszámainak* t *felső határa és a külsők* T_i-inek T *alsó határa megegyezik*, $t = T$. (L. az 1. ábrát!)

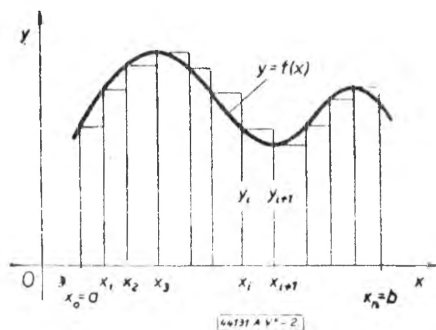


1. ábra

A területszámításnál *feltételezzük*, hogy a két vagy több egymásba nem nyúló síkrészből álló alakzat területe az egyes síkrészek területének összegével egyenlő; továbbá, hogy egybevágó idomok egyenlő területűek.

β) Az $y = f(x)$ függvény görbéje alatti terület

Ilyen értelemben *az* $[a, b]$ *véges* szakaszon értelmezett, s ott korlátos, egyértékű, folytonos* $y = f(x)$ *függvény görbéje alatti terület mérhető.* L. a 2. ábrát!) A mérés a következő **módszerrel** történik:**



2. ábra

a) az $[a, b]$ szakaszt $x_0 = a < x_1 < < x_2 < \ldots x_i < \ldots < x_n = b$ osztópontokkal n (nem feltétlenül egyenlő) *részszakaszra* bontjuk; $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$;

b) az egyes Δx_i részszakaszok y_i kezdő ordinátáival (vagy y_{i+1} végordinátáival) megszerkesztjük a (2. ábrán látható) vízszintes, *n-lépcsős törtvonalat* (e törtvonallal határolt síkrész területe lesz a kérdezett terület egy közelítő értéke):

c) képezzük az így nyert téglanyok

* Az [ ] jel zárt s így *véges* szakaszt jelöl, önmagában is.
** L. Bermant i. m. I. kt. 279. és köv. o.

$y_i\,\Delta x_i$ területét, majd ezek

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i$$

összegeként a törtvonal alatti teljes síkrész területét;

d) vesszük ezen *összeg határértékét*, amikor a beosztási részszakaszok n száma minden határon túl nő, s közben közülük a legnagyobbnak a hossza is 0-hoz tart:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i\,.$$

E határértéket Leibniz $\int_a^b f(x)\,dx$ *módon jelölte, és az* $f(x)$ *függvény* $[a, b]$ *szakaszmenti* ***határozott integráljának*** *nevezte.*

Megemlítjük, hogy a határozatlan integrál bevezetésénél, más felfogásban, már érintettük a görbe alatti terület mérésének kérdését.*

A határozott integrál e geometriai értelmezéstől függetlenül is definiálható. (L. e §. b) pontjában!)

γ) Fizikai és műszaki alkalmazások

Hasonló módon képezhető számos fizikai és műszaki fogalom, pl változó erő munkája, változó sebességgel megtett út, változó lineáris sűrűségű anyagi görbe tömege, változó szögsebességgel megtett szögelfordulás, váltakozó áram teljesítménye stb.

Mindezeknél a változó mennyiséget először *részszakaszonként állandó*nak, azaz vízszintes lépcsős törtvonallal ábrázolható eloszlásúnak tekintjük; képezzük az erre vonatkozó *összeget* s végül ennek *határértékét*, amikor a legnagyobb részszakasz hossza is 0-hoz, s így a lépcsős eloszlás az eredetihez tart!

Ilyen értelemben a *munkát* az erő út-szerinti integráljának, az *utat* a sebesség idő-szerinti integráljának, az *anyagi görbe tömegét* a lineáris sűrűség görbehossz-szerinti integráljának, s. í. t. nevezzük.**

b) A határozott integrál (Riemann-féle) fogalma, létezésének kritériumai. Integrálható függvények

α) Definíció***

Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ véges**** szakaszon értelmezett függvény. Osszuk fel e szakaszt $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ részszakaszokra. Ezek *legnagyobbik*át jelöljük így: $\lambda = \max \Delta x_i$. Válasszunk minden részszakaszon egy-egy $x = \xi_i$, $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ pontot és képezzük a hozzájuk tartozó $f(\xi_i)$ értékekkel a következő *összeget*:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

* L. A. IV. kt. I. §. a) γ_3.
** L. bővebben *Bermant* i. m. I. kt. 281. o.
*** L. *Фихтенгольц* i. m. II. k. 110. o.
**** Az [ ] jel zárt s így *véges* szakaszt jelöl — mint előbb mondottuk.

Azt mondjuk, hogy *a σ összeg λ → 0-nál I véges határértékhez tart, ha tetszőleges ε > 0 számhoz található olyan δ > 0 szám, amelynél kisebb λ értékekre, azaz λ < δ esetén — a ξ_i-k bármilyen választásánál — fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$|\sigma - I| < \varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma .$$

Ezen egyenlőséget úgy is értelmezhetjük, hogy *a σ értékek sorozata — az [a, b] szakasz beosztásának módjától és a ξ_i pontok választásától függetlenül — mindig ugyanazon I határértékhez tart.*

Ha a σ összegnek λ → 0-nál létezik véges I határértéke, akkor ezt az f(x) függvény [a, b] szakaszmenti **határozott integráljának** *nevezzük és a következő szimbólummal jelöljük:*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Az *a* és *b* az integrál ú. n. *alsó és felső határa, f(x)* az *integrálandó,* az *x* az *integrálási változó*, az ∫ és *dx* a határozott integrál definíciójában szereplő Σ- és Δx_i-re emlékeztető jelek.

Ismételjük, hogy a határozott integrál e *Riemann*tól származó definíciója megköveteli, miszerint az ú. n. *Riemann-összegek* vagy integrál-összegek, azaz a $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ összegek — az [a, b] szakasz beosztásától és a ξ_i-k választásától *függetlenül* — tartsanak ugyanazon *I* határértékhez.

Kiemelendő, hogy *a fenti definíció véges szakaszt és korlátos függvényt tételez fel.* Tehát: $m \leq f(x) \leq M$, ha $a \leq x \leq b$.

β) Darboux-összegek*

β₁) A Δx_i részszakaszok m_i minimális és M_i maximális ordinátájával képzett

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i \quad \text{és} \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i$$

két összeget *alsó és felső* **Darboux-összeg**nek nevezzük. Minthogy

$$m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i ,$$

így:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i,$$

vagy röviden:

$$s \leqq \sigma \leqq S.$$

Egy adott szakaszbeosztásra vonatkozó két (s és S) Darboux-összeg tehát *a Riemann-összegek pontos alsó és felső korlátja.*

β₂) A *Darboux*-összegek **sajátságai:** 1. *Egy adott szakasz-beosztást további pontokkal finomítva, az alsó összeg csak nőhet, a felső csak csökkenhet.* 2. *Az [a, b] szakasz bármely beosztásához tartozó valamely alsó összeg nem múlhat felül valamely felső összeget.*

* L. bővebben *Фихтенгольц* i. m. II. kt., 112. és köv. o.

Az alsó összegeknek pontos I_* felső, a felső összegeknek pontos I^* alsó korlátjuk van, azaz:

$$I_* = \sup \{s\}, \quad I^* = \inf \{S\} \quad \text{és} \quad I_* \leqq I^*,$$

továbbá

$$s \leqq I_* \leqq I^* \leqq S,$$

ahol I_* és I^* az ú. n. *alsó és felső Darboux-integrál.*

β_3) *Bármely korlátos $f(x)$ függvényre mindig igaz, hogy*

$$I_* = \lim_{\lambda \to 0} s; \qquad I^* = \lim_{\lambda \to 0} S$$

A határozott integrál ***létezésének*** *szükséges és elégséges feltétele,* ***hogy az alsó és felső Darboux-integrál egyenlő legyen:***

$$I_* = I^*.$$

Ez összhangban van a mérhetőség előrebocsátott definíciójával.

γ) Az integrál létezésének feltétele

A határozott integrál létezésének szükséges és elegendő feltétele ***más*** alakban az, hogy ***az ordináták részszakaszonkénti $M_i - m_i = \omega_i$*** ú. n. **ingadozásával** (oszcillációjával) ***képzett összeg határértéke zérus*** *legyen,* azaz:

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = \lim_{\lambda \to 0} \left[\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \right] =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

δ) A fontosabb (Riemann szerint) integrálható függvénytípusok*

δ_1) *Ha* az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ *szakaszon folytonos,* ott integrálható.

δ_2) Ha az $f(x)$ korlátos függvénynek az $[a, b]$ szakaszon csak *végesszámú szakadási pontja* [*van,* vagyis $f(x)$ itt csak részszakaszonként folytonos], akkor ott integrálható.

δ_3) *Monoton korlátos* függvény mindig integrálható.

ε) Az integrálható függvények sajátságai*

ε_1) Ha $f(x)$ az $[a, b]$ közön integrálható, akkor ugyanott $f(x)$ *és $k\,f(x)$ is* (k = const.) integrálható.

ε_2) Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $[a, b]$ közön integrálható, akkor ugyanott *összegük, különbségük és szorzatuk is* integrálható; továbbá, ha $f(x)$ és $g(x)$ az $[a, b]$ közön integrálható és $|g(x)|$ nagyobb marad bizonyos pozitív számnál, akkor $[a, b]$-ben az $f(x)/g(x)$ *hányados is* integrálható.**

ε_3) Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ szakaszon, akkor ennek tetszőleges $[\alpha, \beta]$ *részszakaszán is* integrálható. Fordítva, ha az $[a, b]$ szakaszt részszakaszokra osztjuk, amelyek bármelyikén $f(x)$ értelmezett és integrálható, akkor *$f(x)$ az egész $[a, b]$ szakaszon is* integrálható.

ε_4) Ha egy integrálható függvény értékét *végesszámú pontban megváltoztatjuk,* integrálhatósága továbbra is megmarad.

* L. Фихтенгольц i. m. II. k., 117. és köv. o.
** Szász Pál i. m. I. k., 213. o.

Példák és feladatok

*α | α_1) ***Állapítsuk meg az alábbi végtelen sorok összegét határozott integrálok segítségével!***

1. $$\lim_{n\to 0}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right]=?$$

Itt is és az alábbi példáknál is arra törekszünk, hogy a sort a

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Riemann-összeg alakjára hozzuk. Ennek

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sigma=\int_a^b f(x)\,dx$$

határértékét azután az $F(x)$ primitív függvény ismeretében, a c) γ) alapján, $F(b)-F(a)$ módon számítjuk.

Esetünkben:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}.$$

Itt $x_i=\frac{i}{n}$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ és $f(\xi_i)=f(x_i)=\frac{1}{1+x_i}$ és $0<x_i\leq 1$, amikor $i=1,2,\ldots,n$.

Azaz

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\,\Delta x_i=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\ln(1+x)\Big]_0^1=\ln 2.$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}\right]=?$$

Itt az átalakítás:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{2n-1}\frac{i}{n^2}=\sum_{i=1}^{2n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{2n-1}x_i\,\Delta x_i\,,$$

ahol $x_i=\frac{i}{n}$, $\Delta x_i=\frac{1}{n}$, továbbá $f(\xi_i)=f(x_i)=x_i$, $0<x_i<2$ és $i=1,2,\ldots,2n-1$.

A határérték:

$$I=\lim_{n\to\infty}\sigma=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}x_i\,\Delta x_i=\int_0^2 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{2}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]=?$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right]=?$$

5. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}=?$$

α_2) *Állapitsuk meg az alábbi határozott integrálok értékét, az integrálási szakasz alkalmas beosztási módjával kapcsolatos Riemann-összeg határértékeként!*

6. $\int\limits_0^a x^k\,dx = ?$ $(a \neq 0$ és $k \neq -1)$. — Osszuk a $0 \leq x \leq a$ közt n egyenlő rész-szakaszra; ekkor az $x_i = 0 + i\dfrac{a}{n}$ értékek *számtani haladványt* alkotnak.

Velük:

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{a}{n}\right)^k\frac{a}{n}=a^{k+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Itt felhasználtuk a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

határértéket.*

A c) α_2) szerint továbbá:

$$\int\limits_a^b x^k\,dx=\int\limits_0^b-\int\limits_0^a=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

7. Határozzuk meg az $\int\limits_a^b x^k\,dx$ integrált, *geometriai haladvány* szerint változó x abszcisszájú osztópontok alkalmazásával $(k \neq -1;\ a, b > 0)$.

Ekkor:

$$x_i = a\,q^i,\quad \text{ahol}\quad q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

E beosztásra támaszkodó (alsó) *Riemann*-összeg:

$$\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^k\,(aq^{i+1}-aq^i)=a^{k+1}\,(q-1)\sum_{i=0}^{n-1}(q^{k+1})^i.$$

* L. pl.: *Фихтенгольц* i. m. I. k., 2. §. 33. L. még az 5. példát

Ez utóbbi geometriai sort az ismert képlettel összegezve, a $k \neq -1$ esetre nyerjük:

$$\sigma = a^{k+1}(q-1)\frac{(q^{k+1})^n - 1}{q^{k+1}-1} = a^{k+1}(q-1)\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} - 1}{q^{k+1}-1} =$$

$$= (b^{k+1} - a^{k+1})\frac{q-1}{q^{k+1}-1}.$$

Felhasználva a

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^{\mu} - 1}{\alpha} = \mu$$

határértéket (esetünkben $1 + \alpha = q$, $\alpha = q - 1$, $\mu = k + 1$), kapjuk végül:

$$I = \lim_{n\to\infty}\sigma = (b^{k+1} - a^{k+1})\cdot\lim_{q\to 1}\frac{1}{\frac{q^{k+1}-1}{q-1}} = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1},$$

ami az előbbi eredménnyel azonos.

E két példa szépen szemlélteti, hogy integrálható függvény esetén [itt $y = x^k$] a *Riemann*-összeg a beosztást minden határon túl finomítva, a beosztás különbeni módjától függetlenül ugyanazon határértékhez tart.

8. $\int_a^b \sin x\,dx = ?$ — Az $a \leq x \leq b$ szakaszt n egyenlő részszakaszra osztva, $h = \frac{b-a}{n}$ jelöléssel nyerjük a *Riemann*-összegre:

$$\sigma = h\sum_{i=1}^{n}\sin(a + ih).$$

Felhasználva a

$$\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih) = \frac{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left[(a+nh)+\frac{h}{2}\right]}{2\sin\frac{h}{2}} = \frac{\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(b+\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

összeget*, kapjuk végeredményben:

$$I = \int_a^b \sin x\,dx = \lim_{h\to 0}\sigma = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right] = \cos a - \cos b.$$

Az előbbivel analóg

$$\sum_{i=1}^{n}\cos(a+ih) = \frac{\sin\left(b+\frac{h}{2}\right) - \sin\left(a+\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

* L. pl. Фихтенгольц i. m. II. k., X. 3. §. 295.

összeg felhasználásával hasonlóan adódik:

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a\,.$$

9. $\int_0^1 e^x\,dx = ?$ — Dolgozzunk egyenletes szakaszbeosztással! (L. hátul!)

10. $\int_a^b \frac{dx}{x} = ?$ — Oldjuk meg a 7. példa $k = -1$ speciális eseteként! (L. hátul!)

11. Tekintsük a következő $f(x)$ függvényt és állapítsuk meg, hogy integrálható-e?*

$$f(x) = \begin{cases} +\frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q};\ \text{nem egyszerűsíthető } valódi \text{ tört.} \\ 0 & \text{egyéb esetekben.} \end{cases}$$

Tekintsük a függvényt a $[0,1]$ intervallumon, amelyet osszunk fel $\Delta x_i \leqq \lambda$ részintervallumokra (λ fix szám), és válasszunk egy tetszőleges N számot. Ezután a részintervallumokat két osztályba soroljuk:

a) Azon részintervallumok, melyek tartalmaznak $x = \frac{p}{q}$ számot, ahol $q \leqq N$. Mivel ezek véges $k = k_N$ számban vannak, ezért az ilyen intervallumok száma legfeljebb $2k$ (mert egy ilyen szám legfeljebb két intervallum határára eshet), összhosszuk pedig $\leqq 2k\,\lambda$.

b) Azon részintervallumok, melyek nem tartalmaznak ilyen x-számot. Ezekben az ingadozás: $\omega < \frac{1}{N}$.

Ennek megfelelően a $\Sigma\,\omega_i\,\Delta x_i$ *Darboux*-összeget kettéosztjuk, külön tekintve az *a)*, ill. *b)* csoportbeli részintervallumokat. Ez esetben:

$$\sum \omega_i\,\Delta x_i < 2k_N\,\lambda + \frac{1}{N}.$$

Ha $N > \frac{2}{\varepsilon}$ és így $\lambda < \frac{\varepsilon}{4k_N} = \delta$, akkor:

$$\sum \omega_i\,\Delta x_i < \varepsilon\,,$$

azaz a függvény integrálható.

E példa annyiban érdekes, hogy a függvénynek végtelen sok szakadási helye van a $[0, 1]$ intervallumban és mégis integrálható.

2. Vizsgáljuk a

$$\varkappa(x) \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}\ **$$

ú. n. *Dirichlet*-féle függvényt!

* L. *Фихтенгольц* i. m. II. k., 121. o.
** L. *Фихтенгольц* i. m. II. k., 122. o.

Minthogy a [0,1] intervallum bármely részén van racionális és irracionális szám is, így ω bármely részintervallumban = 1, tehát:

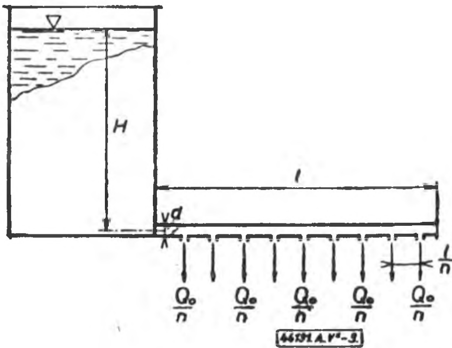
$$\sum \omega_i \Delta x = 1,$$

azaz ez a függvény nem integrálható.

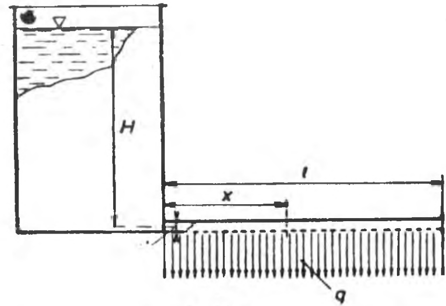
Műszaki alkalmazás

1. NYOMÁSVESZTESÉG MEGHATÁROZÁSA SZABADON VÉGZŐDŐ KIFOLYÓCSŐ ESETÉN, EGYENLETESEN ELOSZTOTT LEÁGAZÁSOK MELLETT.*

A 3. ábrán látható víztartályból egy l hosszúságú, d átmérőjű, *szabadon végződő kifolyócső* ágazik le. Erre a csőre egymástól egyforma távolságban n darab *csap* van felszerelve. A tartályból másodpercenkint Q_0 liter víz távozik. A csapok mindegyike másod-



3. ábra



4. ábra

percenkint $\frac{Q_0}{n}$ liter vizet szállít. Kérdés, hogy mekkora lesz a nyomásveszteség értéke a teljes csőhosszon abban az esetben, ha a csapok száma minde határon túl nő (4. ábra).

Dupuit kép ete alapján a *nyomásveszteség* értéke:**

$$h^* = \frac{\beta}{d^5}\,\frac{l}{n+1}\left(\frac{Q_0}{n}\right)^2 + \frac{\beta}{d^5}\,\frac{l}{n+1}\left(\frac{2Q_0}{n}\right)^2 + \frac{\beta}{d^5}\,\frac{l}{n+1}\left(\frac{3Q_0}{n}\right)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\beta}{d^5}\,\frac{l}{n+1}\left[\frac{(n+1)\,Q_0}{n}\right]^2 + \frac{\beta}{d^5}\,\frac{l}{n+1}\left(\frac{nQ_0}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{\beta}{d^5}\,\frac{l}{n+1}\,\frac{Q_0^2}{n^2}\,[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots (n-1)^2 + n^2] =$$

$$= \frac{\beta l Q_0^2}{d^5} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1} = \frac{\beta l\, Q_0^2}{d^5} \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, \Delta x_i,$$

* L. *Németh:* Ivóvízellátás.

** β egy, a súrlódásra jellemző konstans.

az α) 1. és 2. példája szerint. *Határátmenetben:*

$$h = \lim_{n\to\infty} h^* = \frac{\beta\, l\, Q_0^2}{d^5} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, \Delta x_i = \frac{\beta l Q_0^2}{d^5} \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{\beta l Q_0^2}{3d^5}$$

[Hasonló eredményre jutunk, ha kiindulásul feltételezzük, hogy a csőszál mentén folyóméterenként *egyenletesen megosztva* másodpercenkint q liter vizet veszünk ki. A tartályból másodpercenként kivett vízmennyiség eszerint $Q_0 = q\, l$. A 4. ábrán bejelölt x hosszúságú csőszakasz pedig $Q_{0x} = q\, x$ vízmennyiséget emészt. Egy dx hosszúságú elemi csődarabon a nyomásveszteség *Dupuit* szerint:

$$dh_x = \frac{\beta Q_{0x}^2}{d^5} dx = \frac{\beta q^2 x^2}{d^5} dx.$$

Az integrálást az adott határok között elvégezve:

$$h = \frac{\beta q^2}{d^5} \int_0^l x^2 \, dx = \frac{\beta q^2}{d^5} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} \frac{\beta l Q_0^2}{d^5}.$$

Eredményünk természetesen megegyezik az előbb kapott eredménnyel.]

c) A határozott integrálra vonatkozó egyenlőségek, egyenlőtlenségek, tételek

α) Egyenlőségek és egyenlőtlenségek

α_1) Ha $f(x)$ a $[b, a]$ (irányított) szakaszon integrálható, akkor *az* $[a, b]$ (irányított) *szakaszon szintén* integrálható és fennáll:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

A definícióból következik, hogy:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

α_2) Legyen $f(x)$ integrálható az $[a, b]$, $[a, c]$ és $[c, b]$ szakaszok *legnagyobbikán.* Akkor *a másik kettőn is* integrálható és fennáll:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx,$$

bármilyen is legyen az a, b és c pont viszonylagos elrendezése

α_3) Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ közön, akkor ott $k\, f(x)$ *szintén* integrálható (k = const.) és

$$\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$$

$\alpha_4)$ Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $[a, b]$ közön integrálható, akkor ott az $f(x) \pm g(x)$ is integrálható és

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$\alpha_5)$ Ha $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszon integrálható, *nem-negatív* függvény és $a < b$, akkor:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0\,.$$

Ha $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszon integrálható *pozitív* függvény és $a < b$, akkor:

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

$\alpha_6)$ Ha $f(x)$ és $g(x)$ az $[a, b]$ közön integrálható és ott mindenütt $f(x) \leqq g(x)$, [vagy $f(x) < g(x)$], akkor $a < b$ esetén fennáll:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \int_a^b g(x)\,dx, \quad \left[\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx\right].$$

$\alpha_7)$ Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ közön és $a < b$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

$\alpha_8)$ Ha $f(x)$ az $[a, b]$ közön integrálható és az egész közön fennáll az $m \leqq f(x) \leqq M$ egyenlőtlenség, akkor igaz:

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a),$$

ahol $a < b$. E tényt felhasználjuk a középértéktételnél! (Lásd az e. alatt!)

$\beta)$ Változó felső határú határozott integrál

Ha $f(x)$ integrálható az $[a, b]$ szakaszon $(a \gtrless b)$, akkor szintén integrálható [a b) ε_3) szerint] az $[a, x]$ szakaszon, ahol x tetszőleges érték az $[a, b]$-ben. A határozott integrál b felső határát e változó x-szel felcserélve, az így nyert

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

kifejezés nyilván az x függvénye lesz. — Nézzük e $\Phi(x)$ függvény főbb sajátságait!

$\beta_1)$ Ha az $f(t)$ függvény integrálható az $[a, b]$ közön, akkor $\Phi(x)$ *ugyanott az* x *folytonos függvénye*

β_2) Ha a *$f(t)$ függvény folytonos a $t = x$ pontban, akkor ugyanezen pontban a $\Phi(x)$ függvénynek van deriváltja,* mégpedig:

$$\Phi'(x) = f(x).$$

A fentebbi

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

integrálnak a változó x felső határ szerinti deriváltja bárhol egyenlő az integrálandó $f(t)$ függvénynek e határon felvett értékével.

Más szavakkal: *az $[a, b]$ szakaszon folytonos $f(x)$ függvénynek mindig létezik ott primitív függvénye; egy ilyen a*

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

változó felső határú határozott integrál.

Ezen elméleti és gyakorlati szempontból nagy jelentőségű tételnél utalunk a b) δ_1)-re és ε_3)-ra, melyek szerint az $[a, b]$ szakaszon folytonos $f(x)$ függvény integrálható az egész $[a, b]$ szakaszon és bármelyik $[a, x]$ részszakaszán.

γ) Az integrálszámítás alapképlete

γ_1) Az előbb láttuk, hogy az $[a, b]$ szakaszon folytonos $f(x)$ függvény esetén a

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

integrál az $f(x)$ egyik primitív függvénye. Ha $F(x)$ az $f(x)$ egy másik, tetszőleges primitív függvénye, akkor fennáll:

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

A jobboldali C állandó meghatározása a

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

alapján történik:

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \qquad C = -F(a),$$

tehát

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Az $x = b$ esetén nyerjük *az integrálszámítás alapképletét:*

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Eszerint *a határozott integrál értéke kifejezhető az $f(x)$ integrálandó egy tetszőleges primitív függvényének, $F(x)$-nek két [$F(b)$ és $F(a)$] értéke segítségével.*

E tény rendkívül nagy jelentőségű. — Mint láttuk, a határozott integrálok kiszámítása *Riemann*-összegek határértékeként, még a legegyszerűbb függvények esetén is, igen bonyodalmas. — Ezzel szemben igen könnyű a számítás a fenti alapképlet segítségével minden olyan folytonos integrálandó esetén, amelynek egy primitív függvénye (az A. IV. kötetben tanulmányozott valamelyik módon) elemi függvényekkel, zárt alakban előállítható.

γ_2) Figyelemre méltó, hogy a fenti alapképlet egyszerű *összefüggést* teremt *a differenciálszámítás és integrálszámítás középértéktétele között*. Ugyanis:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) = F'(\xi)(b-a),$$

ahol $a \leq \xi \leq b$.

γ_3) Ha (x) integrálható az $[a, b]$ közön, az ugyanott folytonos $F(x)$-re pedig — véges számú $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ pont kivételével — a közön mindenütt $F'(x) = f(x)$, akkor *az alapképlet más alakban*:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

ahol $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$.

Példák és feladatok

α | 1. Az α) alatt említett *tulajdonságok kimutatása* egyszerű függvényekkel kapcsolatban.

α_1) $$\int_2^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{125-8}{3} = 39;$$

$$\int_5^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_5^2 = \frac{+8-125}{3} = -39 = -\int_2^5 x^2\,dx.$$

α_2) $$\int_2^5 x^2\,dx = 39; \quad \int_2^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{64-8}{3} = \frac{56}{3}.$$

$$\int_4^5 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_4^5 = \frac{125-64}{3} = \frac{61}{3};$$

$$\int_2^4 x^2\,dx + \int_4^5 x^2\,dx = \frac{56}{3} + \frac{61}{3} = 39 = \int_2^5 x^2\,dx.$$

* L. bővebben *Фихтенгольц* i. m. II. k., 148. és k. v. o.

$\alpha_3)$ $$\int_2^5 3x^2\,dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_2^5 = [x^3]_2^5 = 125 - 8 = 117 = 3\cdot 39 = 3\int_2^5 x^2\,dx.$$

$\alpha_4)$ $$\int_2^5 x^2\,dx = 39; \quad \int_2^5 (-6x+8)\,dx = [-3x^2+8x]_2^5 = -39;$$

$$\int_2^5 (x^2-6x+8)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_2^5 = 0.$$

$\alpha_5)$ $x^2 > 0$, $5 > 2$, tehát $\int_2^5 x^2\,dx > 0$.

$\alpha_6)$ $x^2 < x^3$, ha $2 \leqq x \leqq 5$; így $\int_2^5 x^2\,dx < \int_2^5 x^3\,dx$;

valóban:

$$\int_2^5 x^2\,dx = 39, \int_2^5 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^5 = 152\frac{1}{4}, \quad 39 < 152\frac{1}{4}.$$

$\alpha_7)$ $$\left|\int_0^2 (x^2-x)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2\right| = \left|\left[\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right]\right| = \frac{2}{3}.$$

Valamely mennyiség abszolút értéke magával a mennyiséggel egyenlő, ha az pozitív, és -1-szeresével, ha negatív. Az $x^2 - x$ függvény a $(0, 1)$ intervallumban negatív, az $(1, 2)$-ben pedig pozitív. Tehát e függvény abszolút értékének az integrálját a $[0, 2]$ intervallumban úgy kapjuk meg, hogy vesszük a függvény -1-szeresének integrálját a $[0, 1]$ szakaszon, továbbá magának a függvénynek az integrálját az $[1, 2]$ szakaszon, és ezeket összegezzük.

Azaz:

$$\int_0^2 |x^2-x|\,dx = \int_0^1 |x^2-x|\,dx + \int_1^2 |x^2-x|\,dx =$$

$$= -\int_0^1 (x^2-x)\,dx + \int_1^2 (x^2-x)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$

Tehát valóban:

$$\left|\int_0^2 (x^2-x)\,dx\right| < \int_0^2 |x^2-x|\,dx.$$

$\alpha_8)$ $x^2 \leq 25$, ha $0 \leq x \leq 5$, így

$$\int_2^5 x^2\,dx \leq (5-2)\,25 = 75.$$

Valóban:

$$\int_2^5 x^2\,dx = 39 < 75.$$

Mutassuk ki az $\alpha_1) - \alpha_2)$ érvényességét a következő integrálokra:

2. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$; dolgozzunk a $0 \leq x \leq \pi$ és a $\pi \leq x \leq 2\pi$ részintervallumokkal.

3. $\int_0^{\pi} (\sin x + \cos x)\,dx$.

4. Mutassuk ki az $\alpha_3) - \alpha_6)$ érvényességét, ha

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x - 4 \\ g(x) &= x^2 - 4 \end{aligned}\right\} \text{ és } 1 \leq x \leq 5.$$

5. Mutassuk ki az $\alpha_7) - \alpha_8)$ érvényességét az

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

integrálra.

$\gamma)$ *Állapítsuk meg az alábbi határozott integrálok értékét, az integrálszámítás alapképletének és a megfelelő alapintegráloknak felhasználásával!*

1. $\int_a^b x^k\,dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$; $k \neq -1$.

2. $\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$; $a > 0$, $b > 0$.

3. $\int_a^b \sin x\,dx = [-\cos x]_a^b = \cos a - \cos b$.

4. $\int_a^b \cos x\,dx = [\sin x]_a^b = \sin b - \sin a$.

5. $\int_0^{\pi} \cos mx\,dx = \left[\frac{\sin mx}{m}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq 0 \\ \pi, & \text{ha } m = 0 \end{cases}$.

A $(0, \pi)$ szakaszon m számú $+$ és ugyanannyi $-$ területi mérőszámú negyedhullám van.

6. $$\int_0^\pi \sin mx\, dx = \left[\frac{-\cos mx}{m}\right]_0^\pi = \frac{1-(-1)^m}{m} = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \text{ páros;} \\ \dfrac{2}{m}, & \text{ha } m \text{ páratlan.} \end{cases}$$

A $\frac{2}{m}$ éppen egy $+$ félhullám (0 és π közt m félhullám van) területe.

7—9. $$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx, \qquad \int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx, \qquad \int_0^\pi \cos mx \sin nx\, dx.$$

Az ismert

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right],$$

$$\cos mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x\right]$$

azonosságok értelmében ezen integrálokat az **5.** és **6.** példabelire lehet visszavezetni. Ilyen módon:

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } m = n \neq 0; \\ 0, & \text{ha } m \neq n; \\ \pi, & \text{ha } m = n = 0. \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } m = n \neq 0; \\ 0, & \text{ha } m \neq n; \\ 0, & \text{ha } m = n = 0. \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \cos mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m = n, \text{ továbbá } m \text{ és } n \text{ egyaránt páros, vagy egyaránt páratlan;} \\ \dfrac{2}{2(m+n)} - \dfrac{2}{2(m-n)} = \dfrac{2n}{n^2-m^2}, & \text{ha } m \text{ és } n \text{ egyike páros, másika páratlan.} \end{cases}$$

10—11. $$\int_0^{2\pi} \cos mx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq 0; \\ 2\pi, & \text{ha } m = 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx\, dx = 0, \quad \text{minden egész } m\text{-re.}$$

Mindkét esetben a $0 \leq x \leq 2\pi$ periódusra m számú + és ugyanannyi — félhullám esik. (5. és 6. pl.)

12—14. $$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0, \text{ ha } m \neq n; \\ \pi, \text{ ha } m = n \neq 0; \\ 2\pi, \text{ ha } m = n = 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0, \text{ ha } m \neq n; \\ \pi, \text{ ha } m = n \neq 0; \\ 0, \text{ ha } m = n = 0. \end{cases}$$

$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$, bármilyen egész m és n esetén. A $0 \leq x \leq 2\pi$ periódusra ugyanis egyenlő számú + és — félhullám esik.

15—17. Ugyanezen eredményeket kapjuk, ha a $\cos mx \cos nx$, $\sin mx \sin nx$ és $\cos mx \sin nx$ függvényeket a $-\pi \leq x \leq \pi$ szakaszon, azaz ismét egy *teljes*, 2π hosszúságú perióduson integráljuk!

Az 5—17. integrálok nagy szerepet játszanak periodikus függvények trigonometrikus (Fourier-) sorbafejtésénél.

18. $\int_{-2}^{-4} \frac{dx}{1 - x^2} = ?$

19. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2 - 1} = ?$

20. $\int_0^{2a} \frac{3dx}{2b - x} = ?$ $(b > a > 0)$

21. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11 + 5x)^3} = ?$

22. $\int_0^1 \sqrt{1 + x} \, dx = ?$

23. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3 - x)^4}} = ?$

24. $\int_0^3 \frac{dx}{9 + x^2} = ?$

25. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{\cos^2 2\varphi} = ?$

26. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = ?$

27. $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = ?$

28. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \, dx = ?$

29. $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x \, dx = ?$

30. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{10}} \cos 2x \sin 3x \, dx = ?$

31. $\int\limits_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx = ?$

32. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 \, dx}{1+x^2} = ?$

33. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = ?$

34. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3} = ?$

35. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x(x+2)^3} = ?$

36. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx = ?$ — Felhasználjuk a már szerepelt

$$\sum_{i=1}^{n} \cos(a+ih) = \frac{\sin\left[a+\left(n+\frac{1}{2}\right)h\right] - \sin\left(a+\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

egyenlőséget, amely az $a = 0$, $h = 2x$ és $n = m - 1$ jelölések esetén így alakul:

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \cos 2ix = \frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x}.$$

Minthogy az előző példák szerint

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ix \, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \cos 2ix \, dx = 0, \text{ amikor } i = 1, 2, \ldots,$$

ezért végeredményben:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x} dx = 1 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

*37. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = ?$** — Felhasználjuk a

* E *Dirichlet*-től származó integrál fontos szerepet játszik a *Fourier*-sorok elméletében. L. a B. VI. kötetben!

** E *Fejér Lipót*tól származó integrál szintén jelentős szerepet játszik a *Fourier*-sorok elméletében. L. a B. VI. kötetben!

$$\sum_{i=1}^{n} \sin(a + ih) = \frac{\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right)h\right]}{2 \sin \frac{h}{2}}$$

ismert összefüggést, amely $a = -x$, $h = 2x$ jelölések esetén így alakul:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin(2i - 1)x = \frac{1 - \cos 2nx}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Ezt $\frac{1}{\sin x}$-szel szorozva és az előző példa eredményét figyelembe véve, nyerjük:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2i - 1)x}{\sin x} dx = n\frac{\pi}{2}.$$

*Műszaki alkalmazások**

1. KÖRÍVRE HATÓ, SUGÁRIRÁNYÚ, EGYENLETESEN MEGOSZLÓ ERŐRENDSZER EREDŐJE

Legyen a körív sugara r, a körívhez tartozó középponti szög α. A szimmetria-viszonyokból következik, hogy a keresett R eredő az α szögfelezőjében fog működni (5 ábra). A $ds = r\,d\varphi$ ívelemre $dP = P\,ds$ *elemi erő* működik. Ezen elemi erőnek *a szögfelező irányába eső komponense:*

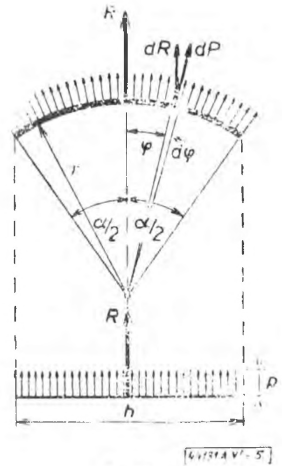
$$dR = dP \cos\varphi.$$

A teljes R erőt ezekután a következő integrál szolgáltatja:

$$R = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} dP \cos\varphi\, d\varphi = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} pr \cos\varphi\, d\varphi = pr\, 2 \sin\frac{\alpha}{2}$$

E képletben $r\,2 \sin\frac{\alpha}{2}$ az ívhez tartozó húr h hosszával egyenlő, vagyis:

$$R = ph.$$



5. ábra

Valamely körívre ható sugárirányú, egyenletesen megoszló erőrendszer eredője tehát *egyenlő a körívhez tartozó húrra merőlegesen működő, az eredetivel azonos intenzitású megoszló erőrendszer eredőjével.*

Eredményünk felhasználást nyer pl. az ú. n. *kazánformulánál.*

* A differenciálokról és az elemek összegezésének módszeréről l. részletesen a 2. §-ban.

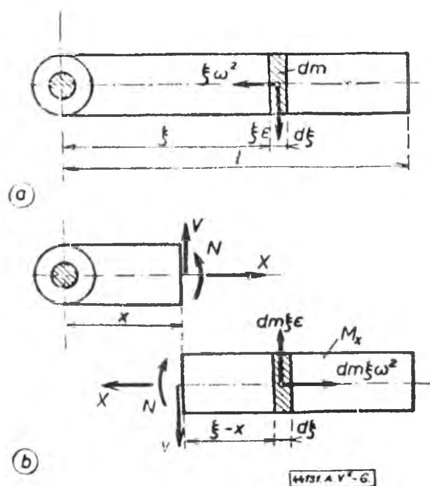
2. SZÖGGYORSULÁSSAL FORGÓ RÚD SZILÁRDSÁGI IGÉNYBEVÉTELE

A függélyes tengely körül ε szöggyorsulással forgó rúd dm elemére ható *tehetetlenségi erő*

tangenciális komponense: $dm\,\xi\,\varepsilon$,

radiális komponense: $dm\,\xi\,\omega^2$.

(6. ábra).



6. ábra

A rúd valamely x abszcisszájú keresztmetszete a következő *szilárdsági igénybevételeket* szenvedi:

a) Húzás:

$$X = \omega^2 \int_x^l \xi\, dm = \omega^2 \xi_s M_x ,$$

ahol M_x az $(l - x)$ hosszúságú rúdrész tömege, ξ_s pedig súlypontjának abszcisszája.

b) Hajlítás: $N = \varepsilon \int_x^l \xi\, dm\, (\xi - x)$.

c) Nyírás: $V = \varepsilon \int_x^l dm\, \xi = \varepsilon\, \xi_s M_x$.

Ha a *rúd* végig *állandó* F *keresztmetszetű*, azaz

$$dm = \frac{\gamma}{g} F\, d\xi ,$$

akkor az előbbi igénybevételek és a megfelelő *feszültségek* így alakulnak:

$$X = \frac{\gamma}{g} F \omega^2 \int_x^l \xi\, d\xi = \frac{\gamma}{g} F \omega^2 \frac{l^2 - x^2}{2} ; \qquad \sigma_1 = \frac{X}{F} = \frac{\gamma\omega^2}{2g} (l^2 - x^2).$$

$$N = \frac{\gamma}{g} F \varepsilon \int_x^l (\xi^2 - x\xi)\, d\xi = \frac{\gamma}{g} F \varepsilon \left[\frac{l^3 - x^3}{3} - x \frac{l^2 - x^2}{2} \right] =$$

$$= \frac{\gamma}{g} F \varepsilon \left[\frac{l^3}{3} - x \frac{l^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] ; \qquad \sigma_2 = \frac{N}{F} = \frac{\gamma}{g} \varepsilon \left[\frac{l^3}{3} - x \frac{l^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right] .$$

$$V = \varepsilon \frac{\gamma}{g} F \int_x^l \xi\, d\xi = \frac{\gamma}{g} F \varepsilon \frac{l^2 - x^2}{2} ; \qquad \tau = \frac{V}{F} = \frac{\gamma\varepsilon}{2g} (l^2 - x^2).$$

3. AUTÓ FÉKEZÉSI IDEJE*

Legyen egy *személyautó* súlya $G = 1620$ kg, motorteljesítménye $N_ö = 46$ LE, üzemi hatásfoka $\eta = 0,85$. Legyen továbbá a gördülő ellenállási tényező $f = 0,018$, a kocsi légellenállási tényezője $\lambda = 0,7$, a levegő sűrűsége $\varrho = 0,127$ kg sec²/m⁴, a kocsi homlokfelületének vetülete $F = 2,65$ m².

Kérdés, hogy a síkpályán $v_0 = 22,5$ m/sec sebességgel haladó kocsit *mennyi idő alatt lehet megállítani,* ha a motort kikapcsoljuk, és a $d = 750$ mm átmérőjű kerekeken összesen $M = 187,8$ kgm fékezőnyomatékot fejtünk ki.

A gördülő ellenállás: $W_1 = f\,G = 0,018 \cdot 1620 = 29,2$ kg. A légellenállás: $W_2 = \lambda\,\psi\,\varrho\,F\,v^2 = 0,7 \cdot 0,5 \cdot 0,127 \cdot 2,65 \cdot v^2 = 0,118\,v^2$ kg. A *fékező erő* (a pályára vonatkoztatva):

$$W_3 = M/r = 187,8/0,375 = 500,8 \text{ kg}.$$

A *teljes lassító erő:* $P = W_1 + W_2 + W_3 = 29,2 + 0,118\,v^2 + 500,8 = 530 + 0,118\,v^2$.

A lassulás: $b = -a = -\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{P}{m} > 0.$

A lelassulás ideje:

$$T = \int_0^T dt = -m\int_{v_0}^0 \frac{dv}{P} = m\int_0^{v_0}\frac{dv}{530 + 0,118\,v^2} =$$

$$= \frac{1620}{9,81}\,\frac{1}{0,118}\int_0^{v_0}\frac{dv}{4490 + v^2} = \frac{1620}{9,81 \cdot 0,118 \cdot 67,1}\left[\operatorname{arctg}\frac{v}{67,1}\right]_0^{v_0} =$$

$$= 20,9 \cdot \operatorname{arctg}\frac{v_0}{67,1} = 20,9 \cdot \operatorname{arctg}\frac{22,5}{67,1} = 20,9 \cdot \operatorname{arctg} 0,336 = 20,9 \cdot \frac{\pi}{180}\,18,6 \approx 6,8 \text{ sec.}$$

d) Határozott integrálok számítása parciális integrálással, helyettesítéssel

α) Általános megjegyzések

A határozatlan integrál különböző típusainál tanulmányozott eljárásokat — az integrálszámítás alapképlete értelmében — felhasználhatjuk határozott integráloknak határozatlanok útján való megállapítására.

Meg kell jegyezni, hogy e cél elérése sokszor leküzdhetetlen, vagy súlyos *nehézségek*be ütközik. Gondoljunk arra, hogy *egy függvény Riemann szerinti integrálhatóságából* (azaz ott a görbe alatti terület mérhetőségéből) *nem következik szükségképpen a primitív függvények létezése,*** *ez utóbbi léte pedig nem biztosítja feltétlenül az elemi függvényekkel, zárt alakban való kifejezés lehetőségét.* Viszont sok ilyen esetben sikerül a határozott integrál kiszámítása az integrálandó és a határok különleges sajátságainak kihasználásával, az integrál célszerű átalakításával, szétbontásával stb. Alább a parciális integrálás és a helyettesítés módszerét alkalmazzuk (bizonyos megszorításokkal) a határozott integrálok körében.

* Menge-Schneider i. m. III. k., 41. o.

** V. ö. az I. § b. δ)-val és az A. IV. 1. § a. δ)-val!

β) Parciális integrálás

Ha bizonyos $[a, b]$ *szakaszon* $u(x)$ *deriválható, ugyanott* $v'(x)$*-nek van primitív függvénye és az* $u'(x)\,v(x)$ *Riemann szerint integrálható, akkor* $u(x)\,v'(x)$ *is integrálható,* éspedig:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\;v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx\,.$$

E formula birtokában szükségtelen teljesen elvégezni a határozatlan integrálást parciálisan, hanem közvetlenül e formulát alkalmazzuk.

Rekurzív eljárás esetén:*

$$\int_a^b uv^{(n+1)}\,dx = [uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n u^{(n)}v]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx.$$

Itt és a megismert rekurzív képleteknél* is érvényben maradnak az $u(x)$-re, $v(x)$-re és fellépő deriváltjaikra a fentebb elmondott követelmények.

γ) Helyettesítés

Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ közön *folytonos. Helyettesítsük* az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrálba az $x = x(u)$ függvényt és differenciálját!

Ha 1. $x(u)$ *határozott* (egyértékű) *és folytonos* valamely $[\alpha, \beta]$ közön, és értékkészlete nem terjed túl az $[a, b]$ közön, amikor $\alpha \leq u \leq \beta$, 2. $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ és 3. az $x'(u)$ *derivált* az $[\alpha, \beta]$ közön *létezik és folytonos*, akkor fennáll:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_{u=\alpha}^{\beta} f[x(u)]\,x'(u)\,du = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(u)\,d\,u = [\Phi(u)]_\alpha^\beta\,,$$

amely utóbbi kifejtve:

$$[\Phi(u)]_\alpha^\beta = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[x(\beta)] - F[x(\alpha)] = F(b) - F(a)\,,$$

ahol

$$\Phi(u) = F[x(u)].$$

Az $x(u)$ egyértékűségi és $x'(u)$ folytonossági követelménye teljesül, ha az $u = u(x)$ *inverz függvény monoton és deriváltja* az $[a, b]$ közön *nem válik zérussá.*

Az említett feltételek fennállása gondosan ellenőrzendő, mert különben könnyen hamis eredményre juthatunk.**

Példák és feladatok

β | 1. $S_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = ?$ $C_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx = ?$

* V. ö. A. IV. k., 3. § b)-vel!
** *Bermant* i. m. I. k., 354. o.

Az m természetes (azaz pozitív egész) szám. Az A. IV. kt. 3. §. b. γ)-ban bemutatott *lehasító módszerrel* parciálisan integrálva, nyerjük:

$$S_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^{m-1} x}_{u} \underbrace{\sin x}_{v'} \, dx =$$

$$= \Big[-\sin^{m-1} x \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x \, dx =$$

$$= 0 + (m-1)\cdot S_{m-2} - (m-1)\cdot S_m, \text{ lévén } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Ezt S_m-re rendezve, a következő *rekurzív képlet* adódik:

$$S_m = \frac{m-1}{m}\cdot S_{m-2}.$$

Ismételten alkalmazva végül

$$S_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}, \text{ illetőleg } S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$$

integrálok valamelyikére jutunk.

Ezek felhasználásával és a rekurzív képlet segítségével előállíthatjuk az S_m és C_m végeredményét.

Páros m (= 2n) esetén:

$$S_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 6\cdot 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2};$$

páratlan m (= 2n + 1) esetén:

$$S_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx = \frac{2n(2n-2)\ldots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk C_{2n} és C_{2n+1}-re! A rövidség kedvéért bevezetjük az

$$m!! = m(m-2)(m-4)\ldots$$

szemifaktoriális jelölést, amellyel írhatjuk:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } m \text{ páros} \\[2ex] \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & \text{ha } m \text{ páratlan.} \end{cases}$$

2. Igazoljuk, hogy:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x\,dx = 0.$$

Induljunk ki az

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x\,dx$$

integrálból. *Kétszeri parciális integrálással* nyerjük:

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{m+2} x}_{u} \underbrace{\cos(m+2)x}_{v'}\,dx = \left[\cos^{m+2} x \frac{\sin(m+2)x}{m+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \frac{m+2}{m+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{m+1} x \sin x}_{u} \underbrace{\sin(m+2)x}_{v'}\,dx = 0 -$$

$$-\left[\cos^{m+1} x \sin x \frac{\cos(m+2)x}{m+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{m+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [-(m+1)\cos^m x \sin^2 x +$$

$$+ \cos^{m+2} x] \cos(m+2)x\,dx = 0 - \frac{m+1}{m+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x\,dx +$$

$$+ \frac{m+2}{m+2} \cdot I_2.$$

Ebből következik, hogy

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x\,dx = 0 \quad \text{q. e. d.}$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosságot!

3—5. Hasonló módon *igazoljuk*, hogy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)x\,dx = \frac{1}{m+1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m+2)x\,dx = -\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin(m+2)x\,dx = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}.$$

6. **Állapítsuk meg a** $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx\,dx$ **integrál értékét (*n* természetes szám)!**

Parciálisan integrálunk $u = \cos^n x$, $v' = \sin nx$ választással:

$$K_n = \left[-\cos^n x \frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{n}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx\,dx =$$

$$= +\frac{1}{n} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx\,dx.$$

Mindkét oldalhoz K_n-et hozzáadva nyerjük:

$$2K_n = \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,(-\sin x \cos nx + \cos x \sin nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{n} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin(n-1)x\,dx = \frac{1}{n} + K_{n-1}.$$

Az így előállt

$$K_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} + K_{n-1}\right]$$

rekurzív formula segítségével már könnyen nyerhető a

$$K_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n}\right)$$

eredmény. – Megjegyzendő, hogy az utolsó integrál:

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx = \frac{1}{4}\Big[\cos 2x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{2}.$$

7. Hasonló módon határozzuk meg az

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx \, dx$$

integrált!

8. $H_{m,n} = \int_0^1 x^m \ln^n x \, dx = ?$ Az $m > 0$ és n természetes szám. – *Parciálisan* integrálva:

$$H_{m,n} = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x\right]_{+0}^{1} - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1} \ln^{n-1} x \, \frac{dx}{x} =$$

$$= 0 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m \ln^{n-1} x \, dx = -\frac{n}{m+1} \cdot H_{m,n-1}.$$

Rekurzio eljárással:
$$H_{m,n} = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} \cdot H_{m,0}.$$

Minthogy

$$H_{m,0} = \int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1},$$

így végül:

$$H_{m,n} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Megjegyzendő, hogy mind az integrálandó, mind a [ ]-es kifejezés értéke $x = 0$-nál csak határértékként képezhető, amikor $x \to +0$.

9. $\int_0^1 x e^x \, dx = ?$

10. $\int_0^1 x^2 e^x \, dx = ?$

11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = ?$

12. $\int_0^{2\pi} x^2 \sin x \, dx = ?$

13. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx = ?$

14. $\int_1^e x^3 \ln x \, dx = ?$

15. $\int_1^2 \ln^2 x \, dx = ?$

16. $\int_1^e \ln^3 x \, dx = ?$

17. $\int_1^2 x \cdot {}^2\log x \, dx = ?$

18. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \, dx}{\sin^2 x} = ?$

19. $\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x \, dx = ?$

20. $\int_0^\pi \sin^2 x \cos^2 x \, dx = ?$

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \cos^{2m+1} x \, dx = ?$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x \, dx = ?$

*23. Igazoljuk, hogy természetes ν és μ esetén:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\nu x \cos^\mu x \, dx = \begin{cases} \dfrac{(\nu-1)!!\,(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \text{ha } \nu \text{ és } \mu \text{ páros;} \\[2ex] \dfrac{(\nu-1)!!\,(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!}, & \text{egyéb esetekben.} \end{cases}$$

(Lásd hátul!)

*24. Igazoljuk, hogy természetes n esetén:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \ldots \pm 1 \mp \frac{\pi}{4}.$$

*25. Igazoljuk, hogy:

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx = 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

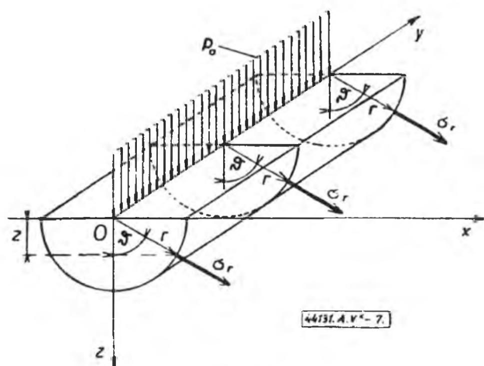
Műszaki alkalmazások

1. VONALAS TERHELÉS HATÁSÁRA ANIZOTROP RUGALMAS FÉLTÉRBEN KELETKEZŐ POLÁRIS FESZÜLTSÉG* (7. ábra)

Fröhlich szerint vonalas terhelés esetén:

$$\sigma = f p_0 \frac{z^{\nu-2}}{r^{\nu-1}} = f p_0 \frac{\cos^{\nu-2} \vartheta}{r}.$$

* *Széchy:* Alapozás I. k., 83. o.



7. ábra

A feszültségek függőleges vetületének a vonalas terheléssel tartott *egyensúlyából* következik, hogy

$$p_0 = 2\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos\vartheta \, dU,$$

ahol

$$dU = r\,d\vartheta\,.$$

Ezzel:

$$p_0 = 2\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \bar{f}\, p_0 \frac{\cos^{\nu-2}\vartheta}{r} \cos\vartheta \, r\, d\vartheta =$$

$$= 2\bar{f}\, p_0 \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-1}\vartheta\, d\vartheta\,,$$

s innen:

$$\bar{f} = \frac{1}{2\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-1}\vartheta\, d\vartheta}\,.$$

E határozott integrál kiszámítási módja ν *páros*, ill. *páratlan* voltától függ [β) 1. pl.]. Ha $\nu = 2n - 1$ (páratlan):

$$\bar{f} = \frac{(\nu-1)(\nu-3)\ldots 2}{(\nu-2)(\nu-4)\ldots 3\cdot 1}\cdot\frac{1}{\pi}\,,$$

ha pedig $\nu = 2n$ (páros):

$$\bar{f} = \frac{(\nu-1)(\nu-3)\ldots 1}{2(\nu-2)(\nu-4)\ldots 2}\,.$$

Mivel mindig egész ν értékekkel számolunk, $\bar{f}$ előforduló értékei ν függvényében az alábbiak:

$\nu =$	1	2	3	4	5	6
$\bar{f} =$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{3\pi}$	$\frac{15}{16}$

Az $\bar{f}$ értékét behelyettesítve nyerjük, hogy:

$$\sigma_r = \bar{f}\,\frac{p_0}{r}\cos^{\nu-2}\vartheta.$$

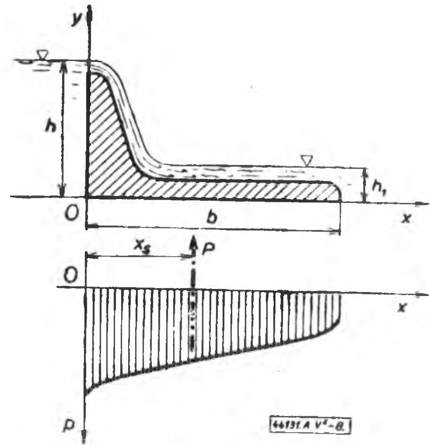
2. GÁTRA HATÓ FELHAJTÓ ERŐ MEGHATÁROZÁSA*

A 8. ábra egy $h - h_1$ duzzasztást előidéző és b hosszúságú alaplemezre ráépített duzzasztógát hosszmetszetét ábrázolja. Feladatunk *a víz gátalatti szivárgásával* egyidejűleg fellépő és a gát alaplemezére ható nyomóerő nagyságának és támadáspontjának meghatározása. A hidromechanika tanítása szerint *az alaplemez mentén a nyomás változását* a

$$p = \frac{\gamma (h - h_1)}{\pi} \arccos \frac{2x - b}{b} + \gamma h_1$$

kifejezés szolgáltatja, ahol γ a víz fajsúlya. Az alaplemez *egész felületére ható erők eredőjét* az előbbi kifejezés integrálásával nyerjük:

$$P = \int_0^b \left[\frac{\gamma (h - h_1)}{\pi} \arccos \frac{2x - b}{b} + \gamma h_1 \right] dx.$$



8. ábra

Innen parciális integrálással kapjuk, hogy:

$$P = \frac{b(h + h_1)}{2} \gamma.$$

Az *eredő helyének* meghatározása céljából képezzük az elemi nyomóerők nyomatékösszegét az O pontra:

$$M = \int_0^b \left[\frac{\gamma (h - h_1)}{\pi} \arccos \frac{2x - b}{b} + \gamma h_1 \right] x \, dx.$$

Szintén parciálisan integrálva:

$$M = \frac{b^2 (3h + 5h_1) \gamma}{16}.$$

Az eddigiek alapján meghatározható az eredő helyének x_s koordinátája:

$$x_s = \frac{M}{p} = \frac{b}{8} \frac{3h + 5h_1}{h + h_1}.$$

γ | 1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}} = \int_1^2 \frac{\frac{dx}{x}}{\sqrt{\ln x}} = ?$ — Helyettesítés:

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad u_a = 0, \quad u_f = \ln 2.$$

* Salamin i. m.

Ezekkel nyerjük:

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\left[\sqrt{u}\right]_0^{\ln 2} = 2\sqrt{\ln 2}.$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = ?$ — Az $u = \sin x$, $du = \cos x\, dx$, $u_a = 0$, $u_f = 1$ helyettesítéssel integrálunk így alakul:

$$I = \int_0^1 (1 - u^2)\, du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

3. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = ?$ — Az $x = a \sin t$, $dx = a \cos t\, dt$, $t_a = \arcsin \frac{0}{a} = 0$, $t_f = \arcsin \frac{a}{a} = \frac{\pi}{2}$ helyettesítéssel nyerjük:

$$I = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi}{4}$$

összhangban azzal, hogy lényegében *az $x^2 + y^2 = a^2$ kör negyedének területét számítottuk!*

4. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = ?$ (L. hátul!)

5. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = ?$ — Helyettesítés: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$,

$t_a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, $t_f = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Ezekkel nyerjük:

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^{\sqrt{3}} = \ln \sqrt{3}.$$

6. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x} = ?$ (L. hátul!)

7. $\int\limits_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4} dx = ?$ — A helyettesítés: $x = \frac{a}{\cos t}$, $dx = + \frac{a \sin t \, dt}{\cos^2 t}$,

$t_a = \arccos \frac{a}{a} = 0$, $t_f = \arccos \frac{a}{2a} = \frac{\pi}{3}$. Ezzel nyerjük:

$$I = \frac{1}{a^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{1}{3a^2} [\sin^3 t]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

8. $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx = ?$

9. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx = ?$

*10 $\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} dx = ?$

11. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x} = ?$

12. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + x} dx = ?$

13 $\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx = ?$

14. $\int\limits_0^1 \frac{x \, dx}{1 + \sqrt{x}} = ?$

15. $\int\limits_3^8 \frac{x \, dx}{\sqrt{1 + x}} = ?$

16. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}} = ?$

17. $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x - 2)^2}} dx = ?$

18. $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x} \, dx}{1 + e^{2x}} = ?$

19. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx = ?$

20. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx = ?$

21. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx = ?$

22. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} = ?$

23. $\int\limits_0^1 \sqrt{x^2 + 2x} \, dx = ?$

24. $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a - x)\sqrt{1 - x^2}} = ?$

25. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x} = ?$

26. $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = ?$

27. $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x - x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\, dx = ?$

28. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^3 x\, dx = ?$

29. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = ?$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1 + 2a \cos x + a^2}} = ?$

31. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = ?$

32. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{x^4\, dx}{(x^2 + 1)\sqrt{1 - x^2}} = ?$

*33. $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi\, d\varphi = ?$ — A $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ helyettesítéssel:

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi\, d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi\, d\varphi$$

(a betű közömbös). Így

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

s ezért:

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

*34. Igazoljuk, hogy: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\, dt}{\sin t}.$

*35. $\displaystyle\int_0^a (a^2 - x^2)^n\, dx = a^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\, dt = a^{2n+1}\frac{2n\,!!}{(2n+1)\,!!},$

ahol az $x = a \sin t$ helyettesítést és a β) 1. példa eredményét alkalmaztuk!

*36. Hasonlóan számítsuk az $\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{2n-1}{2}} dx$ integrált!

*37. $$I = \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = I_1 + I_2 .$$

Az utóbbi integrál az $x = \pi - t$, $dx = - dt$ helyettesítéssel így alakul:

$$I_2 = - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\pi - t) \sin t \, dt}{1 + \cos^2 t} = \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \, dt}{1 + \cos^2 t} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sin t \, dt}{1 + \cos^2 t} .$$

Ezt felhasználva írhatjuk:

$$I = I_1 - I_1 + \pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \, dt}{1 + \cos^2 t} = - \pi \left[\operatorname{arc\,tg} (\cos t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} .$$

Hangsúlyozzuk, hogy *a határozott integrálás itt a primitív függvény ismerete nélkül sikerült, a szakasz alkalmas felosztása és megfelelő helyettesítés révén,* sőt nem is lehetséges a primitív függvényt zárt alakban megadni.

*38. Igazoljuk, hogy

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin 2nx \, dx}{\sin x} = 0.$$

*39. $I = \int\limits_0^1 \frac{\ln (1 + x)}{1 + x^2} dx = ?$ — Az $x = \operatorname{tg} t$ helyettesítéssel:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln (\cos t + \sin t) \, dt - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t \, dt = I_1 + I_2 .$$

Ez utóbbi $t = \frac{\pi}{4} - u$ helyettesítés után így alakul:

$$I_2 = + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln \left[(\cos u + \sin u) \frac{\sqrt{2}}{2} \right] du = - I_1 + \frac{\ln 2}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} du.$$

Végeredményben:

$$I = I_1 - I_1 + \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \ln 2}{8}.$$

*40. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}} = ?$ — Alkalmazva az $x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$ helyettesítést, nyerjük:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\, dt.$$

Mivel

$$\frac{\cos t}{\sin t + \cos t} = 1 - \frac{\sin t}{\sin t + \cos t},$$

ezért

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\, dt;$$

de

$$y = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \quad \text{és} \quad y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$$

egymás tükörképei az $x = \frac{\pi}{4}$ egyenesre vonatkozólag. (Ez a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

összefüggésből azonnal belátható.)

Így nyilvan:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\, dt,$$

ezért

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\, dt = \frac{\pi}{4}.$$

Vagyis:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

*41. $$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \frac{1}{|\sin\alpha|}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right]_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{|\sin\alpha|}\left[\frac{\alpha}{2} + \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{1}{|\sin\alpha|}\left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2|\sin\alpha|}.$$

Közben felhasználtuk az

$$\frac{1 \mp \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \text{ill.} \quad \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha \quad \text{és} \quad \operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$$

azonosságokat!

**42 $$I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx = ? \quad (Poisson)^*.$$

Igazolható, hogy $|r| \neq 1$ esetén *az integrálandó folytonos és az integrál létezik.* Előrebocsátjuk, hogy a *cosinus-tételen* nyugvó

$$(1 - |r|)^2 \leq 1 - 2r\cos x + r^2 \leq (1 + |r|)^2$$

nyilvánvaló egyenlőtlenséget logaritmizálva és 0-tól π-ig integrálva, $|r| < 1$ esetben ezt kapjuk:

$$2\pi\ln(1 - |r|) \leq I(r) \leq 2\pi\ln(1 + |r|).$$

Ebből látható, hogy $r \to 0$ esetén $I(r) \to 0$.

Lássuk most az

$$I(-r) = \int_0^\pi \ln(1 + 2r\cos x + r^2)\,dx$$

integrált!

Az $x = \pi - t$ helyettesítéssel:

$$I(-r) = -\int_\pi^0 \ln[1 + 2r\cos(\pi - t) + r^2]\,dt = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos t + r^2)\,dt = I(r).$$

* L. pl. Фихтенгольц i. m. II. k., 162–163. o.

Ennélfogva:

$$2I(r) = I(r) + I(-r) = \int_0^\pi \ln\left[(1 - 2r\cos x + r^2)(1 + 2r\cos x + r^2)\right] dx =$$

$$= \int_0^\pi \ln(1 + 2r^2 + r^4 - 4r^2\cos^2 x)\, dx = \int_0^\pi \ln(1 - 2r^2\cos 2x + r^4)\, dx,$$

lévén $-4r^2\cos^2 x = -2r^2(1 + \cos 2x)$.

Újabb $x = \frac{t}{2}$ helyettesítéssel:

$$2I(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r^2\cos t + r^4)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi + \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}.$$

A $\cos t$ értékkészlete π és 2π közt ugyanaz lévén (fordított sorrendben), mint 0 és π között, fennáll:

$$2I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r^2\cos t + r^4)\, dt = I(r^2),$$

azaz

$$I(r) = \frac{1}{2} I(r^2).$$

Az előbbi eljárást ismételve nyerjük:

$$I(r) = \frac{1}{2^n} I(r^{2^n}), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Legyen most $|r| < 1$; akkor $n \to \infty$ esetén $r^{2^n} \to 0$ és (az előrebocsátott megjegyzés szerint) egyszersmind $I(r^{2^n}) \to 0$. Ennélfogva kell, hogy azonosan (azaz minden r-re) $I(r) = 0$ legyen $|r| < 1$ esetén!

Ezekután könnyű kiszámítani az integrált az $|r| > 1$ *esetre* is. Ekkor:

$$1 - 2r\cos x + r^2 = r^2\left(1 - 2\frac{1}{r}\cos x + \frac{1}{r^2}\right)$$

és

$$\ln(1 - 2r\cos x + r^2) = 2\ln|r| + \ln\left(1 - 2\frac{1}{r}\cos x + \frac{1}{r^2}\right),$$

úgy, hogy 0-tól π-ig integrálva mindkét oldalt, ezt kapjuk:

$$I(r) = 2\pi\ln|r| + I\left(\frac{1}{r}\right).$$

De az előbbiek szerint azonosan $I\left(\frac{1}{r}\right) = 0$; következésképpen $|r| > 1$ esetén

$$I(r) = 2\pi\ln|r|.$$

43. Igazolandó, hogy

$$e^x - e^{\int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{dx}{1-e^{-x}}} \equiv 1.$$

Számítsuk ki mindenekelőtt a kitevőben szereplő integrált:

$$I = \int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{dx}{1-e^{-x}} = \int\limits_{\ln 2}^{x} \frac{e^x\,dx}{e^x - 1} = \ln\left(e^x - 1\right).$$

Ezek után az eredeti azonosság az

$$e^x - e^{\ln (e^x - 1)} = e^x - (e^x - 1) \equiv 1$$

azonosságba megy át.

44. $$I = \int\limits_{\sqrt{e}}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x\,(1-\ln x)}} = ?$$

45. $$I = \int\limits_{0}^{1} e^{\arcsin x}\,dx = ?$$

46. $$I = \int\limits_{0}^{1} \frac{x^3\,dx}{x^4 + x^2 + 1} = ?$$

47. $$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 \varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}} = ?$$

Műszaki alkalmazások

1. PÁRHUZAMOS FÉMHENGEREK KAPACITÁSA*

A P pontban a *térerősség* (9. ábra)

a $+Q$ töltés hatására: $E_+ = \frac{c}{\varepsilon}\,\frac{4\pi Q}{2\pi x l}$,

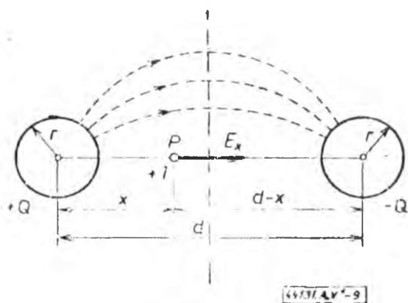
a $-Q$ töltés hatására:

$$E_- = \frac{c}{\varepsilon}\,\frac{4\pi Q}{2\pi (d-x) l};$$

az eredő térerősség pedig:

$$E_x = E_+ + E_- = \frac{c}{\varepsilon}\cdot\frac{2Q}{l}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right],$$

ahol $+Q$, ill. $-Q$ a bal-, illetve jobboldali henger töltése, l a hengerek hossza, c dimenziós állandó, ε a szigetelés dielektromos együtthatója.



9. ábra

A hengerek közti *feszültség*:

$$U = +(U_+ - U_-) = \frac{c}{\varepsilon}\cdot\frac{2Q}{l}\int\limits_{r}^{d-r}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right]dx = \frac{c}{\varepsilon}\cdot\frac{2Q}{l}\left[\ln x - \ln (d-x)\right]_r^{d-r} =$$

$$= \frac{c}{\varepsilon}\cdot\frac{2Q}{l}\left[\ln\frac{x}{d-x}\right]_r^{d-r} = \frac{c}{\varepsilon}\cdot\frac{2Q}{l}\left[\ln\frac{d-r}{r} - \ln\frac{r}{d-r}\right] = \frac{c}{\varepsilon}\cdot\frac{4Q}{l}\ln\frac{d-r}{r}.$$

* [illegible] m. II. kt.

A hengerek *kapacitása* pedig:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{l}{4 \ln \frac{d-r}{r}}.$$

2. MERCATOR TÉRKÉP*

Vetítsük az r sugarú gömb pontjait azon *r sugarú egyenes körhengerre*, amely a gömböt egyenlítő köre mentén érinti. – A gömb minden *délköre* ez esetben a henger egy-egy *alkotójára* képződik le. Még tetszőlegesen *előírhatjuk*, hogy a gömb egy v földrajzi hosszúságú, u szélességű P pontjának a megfelelő hengeralkotó milyen P' pontja feleljen meg (10. ábra).

Állapítsuk meg a leképezés törvényét azon követelmény alapján, hogy a *gömb egy felületeleme és a henger megfelelő felületeleme hasonló (konform), azaz szög- és aránytartó legyen.*

A gömb egyenlítőjének (r sugarú kör) képe a hengeren egy hasonló sugarú kör; kerülete $2r\pi$. Egy u szélességű parallel kör ($2\pi\, r \cos u$ kerületű) képe ugyancsak $2\pi\, r$ kerületű kör. Ez utóbbi körök dv hosszúságváltozáshoz tartozó ívelemei: a gömbön $d\xi = dv\, r \cos u$, a hengeren $dX = r\, dv$, arányuk pedig:

$$\frac{dX}{d\xi} = \frac{1}{\cos u}.$$

10. ábra

Egy délkörön a du szélesség-változáshoz tartozó ívelem $d\eta = r\, du$, a hengeren pedig a megfelelő dY ívelem úgy választandó, hogy a $dx \cdot dy$ és $dX \cdot dY$ megfelelő felületelemek hasonlósága fennálljon. Eszerint:

$$dY : d\eta = dX : d\xi, \quad \text{vagy} \quad dY = d\eta \frac{dX}{d\xi} = r \frac{du}{\cos u}$$

Ebből következik, hogy:**

$$Y = r \int_{0}^{u} \frac{du}{\cos u} = r \ln \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Ha végül e *Mercator-projekció* után a hengert egy alkotója mentén felmetsszük és kiterítjük, akkor ez *a gömb dél- és szélességi köreit függélyes és vízszintes egyenesekként szemlélteti*. A gömb egy u szélességű, v hosszúságú pontjának tehát a *Mercator*-térképen az

$$X = r\, v, \qquad Y = r \ln \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

koordinátájú pont felel meg.

A navigáció elméletében jelentős szerepet játszik a Mercator-térkép

$$Y = aX + b$$

egyeneseinek gömbi képe.

* *Lindow* i. m.
** A. IV. kt. 2. §. a. β) 15. és 16. pl.

Ekkor ugyanis a v és u között fennálló

$$v = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{b}{ar}$$

összefüggés az

$$x = r \cos u \cos v$$
$$y = r \cos u \sin v$$
$$z = r \sin u$$

egyenletrendszerű gömbön az

$$x = r \cos u \cos \left[\frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{b}{ar}\right]$$

$$y = r \cos u \sin \left[\frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{b}{ar}\right]$$

$$z = r \sin \left[\frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{b}{ar}\right]$$

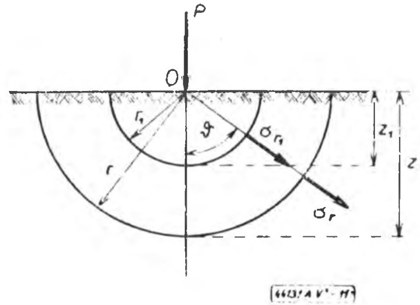
egyenletrendszerű, *gömbi loxodróma* nevű térgörbét jelöli ki. E térgörbe, miként konform képe is a *Mercator*-térképen, olyan tulajdonságú, hogy *a szélességi köröket állandó* $\alpha = \operatorname{arctg} a$ *szög alatt metszi.*

3. KONCENTRÁLT P ERŐ HATÁSÁRA ANIZOTROP RUGALMAS FÉLTÉRBEN KELETKEZŐ FESZÜLTSÉG* (11. ábra)

Fröhlich szerint anizotrop rugalmas féltérben keletkező *poláris feszültség:*

$$\sigma_r = f\, P \frac{z^{\nu-2}}{r^{\nu}},$$

ahol ν a *Poisson*-féle állandó függvénye és ugyanannál a talajféleségnél konstans; f egyelőre ismeretlen állandó. Az ismeretlen f arányossági tényező meghatározása céljából felírhatjuk az *egyensúlyi egyenletet*, mely szerint a poláris főfeszültségek függőleges vetülete egyensúlyt tart a P erővel:



11. ábra

$$\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos \vartheta \, dF = P.$$

Itt

$$dF = 2r^2 \pi \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

tehát:

$$2\pi r^2 \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = P.$$

* *Széchy:* Alapozás, I. k.

Mivel

$$\sigma_r = fP \int \frac{z^{\nu-2}}{r^\nu} \quad \text{és} \quad \frac{z}{r} = \cos\vartheta\,,$$

így:

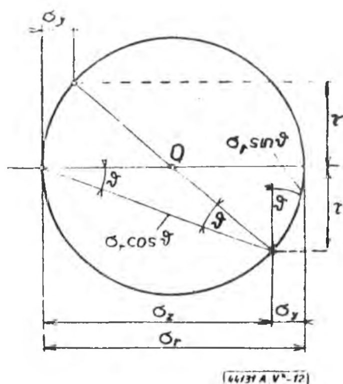
$$fP \cdot 2r^2\pi \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-2}\vartheta}{r^2} \cos\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = P\,;$$

innen:

$$f = \frac{1}{2\pi \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-1}\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta}\,.$$

Az integrálást $\cos\vartheta = u$ helyettesítéssel végrehajtva azt kapjuk, hogy:

$$= \frac{\nu}{2\pi}.$$



12. ábra

Ezzel:

$$\sigma_r = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu-2}\vartheta.$$

Ez a képlet olyan testben keletkező feszültség-eloszlások sorozatát adja, amelyben *nincs húzófeszültség*. A σ_r főfeszültségből a 12. ábrán vázolt speciális *Mohr-kör* (ahol $\sigma_1 = \sigma_r$ és $\sigma_2 = 0$) segítségével lehet *a többi feszültséget* levezetni:

$$\sigma_z = \sigma_r \cos^2\vartheta = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^\nu\vartheta\,,$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sin^2\vartheta = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu-2}\vartheta \sin^2\vartheta\,.$$

$$\tau = \sigma_r \sin\vartheta \cos\vartheta = \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu-1}\vartheta \sin\vartheta\,.$$

4. VONALAS TERHELÉS HATÁSÁRA KELETKEZŐ FESZÜLTSÉG*

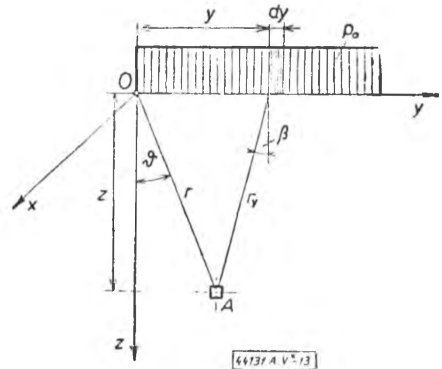
A 13. ábrán látható jelölések mellett a dy szélességű elemi sávra $p_0\,dy$ nagyságú függőleges erő hat. Ennek a terhelésnek a hatására az A pontban *Boussinesq* szerint keletkező *függőleges feszültség:*

$$d\sigma_z = \frac{3p_0\,dy}{2\pi r_1^2} \cos^3\beta\,.$$

* *Széchy:* Alapozás, I. kötet.

A vonalas terhelés nem más, mint a dy elemi szélességű sávokon működő elemi koncentrált terhelések összege; vagyis:

$$\sigma_z = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} d\sigma_z = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{3p_0}{2\pi\, r_y^2} \cos^3\beta\, dy\,.$$



13. ábra

Lévén

$$r_y = \frac{r}{\cos\alpha}\,;\quad dy = \frac{r_y\, d\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cos\beta = \frac{z}{r_y} = \frac{r\cos\vartheta}{r}\cos\alpha\,,$$

így:

$$\sigma_z = \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \frac{3p_0}{2\pi}\,\frac{r\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\,\frac{\cos^2\alpha}{r^2}\cos^3\vartheta\cos^3\alpha = \frac{3p_0}{2\pi r}\cos^3\vartheta \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha\, d\alpha.$$

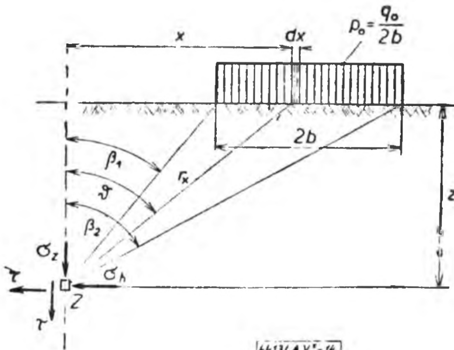
Mivel

$$\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha\, d\alpha = \left[\frac{1}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha\right]_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3}\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\sin\alpha\cos^2\alpha + \frac{2}{3}\sin\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}(1+1) = \frac{4}{3}\,,$$

ezért végül:

$$\sigma_z = \frac{3p_0}{2\pi r}\cos^3\vartheta\cdot\frac{4}{3} = \frac{2p_0}{\pi r}\cos^3\vartheta.$$



14. ábra

5 EGYENLETESEN MEGOSZLÓ SÁVTERHELÉS HATÁSÁRA LÉTREJÖVŐ FESZÜLTSÉG*

Vizsgáljuk a térszín alatt z mélységben fekvő Z pontban keletkező *függőleges σ_z feszültségeket* valamely q_0 nagyságú *egyenletesen megoszló sávterhelés alatt*. (L. a 14. ábrát.)

A Z ponttól x vízszintes távolságban felvett végtelen kis dx szélességre ható $dP = q_0\,dx$ erő tulajdonképpen azonosnak vehető az élterhelés egységnyi hosszra jutó nagyságával, p_0-lal, vagyis

* *Széchy:* Alapozás, I. kötet.

Boussinesq élterhelési képlete szerint a Z pontban fellépő *elemi függőleges feszültség*:

$$d\sigma_z = \frac{2q_0\,dx}{\pi r}\cos^3\vartheta\,.$$

Lévén

$$r_x = \frac{z}{\cos\vartheta}\,;\qquad x = z\,\mathrm{tg}\,\vartheta;\qquad dx = \frac{z}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta,$$

ezért:

$$d\sigma_z = \frac{2q_0\,z\,d\vartheta}{\pi\,z^2\cos^2\vartheta}\cos\vartheta\,\cos^3\vartheta = \frac{2q_0}{\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\,.$$

Innen:

$$\int\limits_0^{\sigma_z} d\sigma_z = \frac{2q_0}{\pi}\int\limits_{\vartheta=\beta_1}^{\vartheta=\beta_2}\cos^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{2q_0}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta + \frac{\vartheta}{2}\right]_{\vartheta=\beta_1}^{\vartheta=\beta_2}.$$

A határokat behelyettesítve:

$$\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\sin\beta_2\cos\beta_2 - \sin\beta_1\cos\beta_1 + (\beta_2-\beta_1)\right],$$

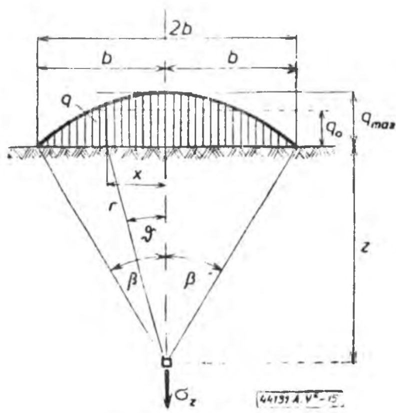
azaz a keresett függőleges feszültség:

$$\sigma_z = \frac{q_0}{\pi}\left[\sin(\beta_2-\beta_1)\cos(\beta_2+\beta_1) + (\beta_2-\beta_1)\right].$$

6. PARABOLIKUSAN MEGOSZLÓ SÁVTERHELÉS HATÁSÁRA LÉTREJÖVŐ FESZÜLTSÉG*

A 15. ábrán látható *parabolikus terhelésre* érvényes a következő összefüggés:

$$q = q_{\max}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right) = \frac{3}{2}\,q_0\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right),$$



15. ábra

ahol q_0 jelenti a képzelt átlagos nyomást.

A *vonalas terhelésből* (lásd a 4. pl. végeredményét):

$$\sigma_z = \frac{2q}{\pi r}\cos^3\vartheta$$

A tengelyvonalban fellépő *függőleges nyomófeszültsége* $q = q\,dx$ összefüggés alapján történő integrálással nyerjük:

$$\sigma_z = 2\,\frac{2}{\pi}\int\limits_{x=0}^{x=b}\frac{3}{2}\,q_0\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)dx\,\frac{1}{r}\cos^3\vartheta,$$

* Széchy: Alapozás I. kötet.

Minthogy

$$r = \frac{z}{\cos\vartheta}, \quad dx = \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} z \text{ és } \quad x = r\sin\vartheta,$$

ezért:

$$\sigma_z = \frac{6}{\pi} q_0 \left\{ \int_0^\beta \cos^2\vartheta \, d\vartheta - \frac{z^2}{b^2} \int_0^\beta \sin^2\vartheta \, d\vartheta \right\}.$$

Ha bevezetjük a

$$\frac{z}{b} = \operatorname{cotg}\beta$$

jelölést, az integrálás elvégzése után kapjuk, hogy:

$$\sigma_z = \frac{3}{\pi} q_0 \{\operatorname{cotg}\beta + \beta(1 + \operatorname{cotg}^2\beta)\}.$$

7. KÚPOS CSŐ HIDRAULIKUS ELLENÁLLÁSA*

Meghatározandó a kúpos cső ellenállása, ha feltételezzük, hogy a cső egy elemi szakaszára *a hidraulikus ellenállási tényező meghatározható a sebesség és az átmérő függvényében*. A cső hossza L, az elején az átmérő D_1, a végén D_2 ($D_1 > D_2$).

Oldjuk meg a feladatot külön a *lamináris* és külön a *turbulens* áramlás esetére!

A kúpos cső ellenállása egy $[x, x + dx]$ elemi szakaszon: $i_x \, dx$, a teljes csőre pedig:

$$h_r = \int_0^L i_x \, dx,$$

ahol a *Lejbenzon*-formula szerint:

$$i_x = \beta \frac{Q^{2-m} \nu^m}{d_x^{5-m}}.$$

Ilyen módon:

$$h_r = \beta Q^{2-m} \nu^m \int_0^L \frac{dx}{\left| D_1 - \frac{x}{L}(D_1 - D_2) \right|^{5-m}}.$$

Az integrálást végrehajtva, kapjuk a kúpos, L hosszúságú cső *hidraulikus ellenállására:*

$$h_r = \frac{\beta Q^{2-m} \nu^m}{(D_1 - D_2)(4 - m)} \left| \frac{1}{D_2^{4-m}} - \frac{1}{D_1^{4-m}} \right|.$$

Lamináris áramlás esetén: $m = 1$; $\beta = 4{,}16$; $\frac{\beta}{4 - m} = \frac{4{,}16}{3} = 1{,}39$.

* L. Яблонский i. m. 76. o.

Turbulens áramlás esetén: $m = 0{,}25$; $\beta = 0{,}0246$; $\dfrac{\beta}{4 - m} = 0{,}00656$;

$$m = 0; \qquad \beta = \frac{8\lambda}{\pi^2 g}; \qquad \frac{\beta}{4 - m} = \frac{2\lambda}{\pi^2 g}.$$

8. Egy test mozgásának sebességét a $v = \sqrt{1 + t}$ m/sec formula szolgáltatja. Mekkora utat tesz meg a test a mozgás kezdetétől számított 10 sec alatt?

9. Az abszcissza-tengelymenti harmonikus rezgőmozgás v sebessége:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right),$$

ahol t az idő, T egy teljes rezgés ideje (periódusa), φ_0 a kezdő fázis. Határozzuk meg a pont helyzetét a t_2 időpillanatban, ha tudjuk, hogy a t_1 időpillanatban a pont az $x = x_1$ helyen van.

*Oldjuk meg az alábbi, vegyészmérnöki számításokban előforduló feladatokat**

10. Az $x\,dy = 2k\,dx$ differenciálegyenlet $x(0) = a$ feltételt kielégítő $x = x_0(y)$ megoldását felhasználva, állapítsuk meg a

$$V = \pi \int_0^{y_1} x_0^2(y)\,dy$$

integrál értékét (lásd hátul).

11. $$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{d\omega}{g\omega^{\frac{2}{3}} + \omega^{\frac{5}{3}}} = ? \quad \text{— Helyettesítés: } t = \omega^{\frac{1}{3}}.$$

12. $$\int_0^1 [e^{EL\omega}(y_{n0} - Y_{n-1}) + Y_{n-1}]\,d\omega,$$

ahol E, L, y_{n0}, Y_{n-1} állandó.

13. $$A = 232 + \int_{170}^{t} [0{,}000374\,t + 0{,}251]\,dt = ?$$

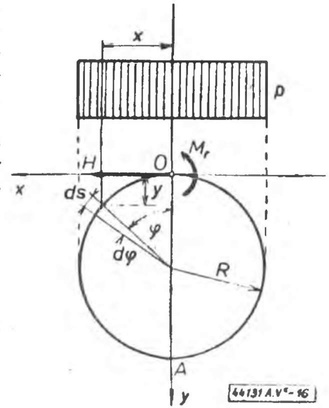
14. $$\int_0^{c_0} \frac{dc}{(62{,}6 - c)^2 (c - c_e)} = ?$$

* *Cell: Engineering Problems.*

** 15. VÉKONYFALÚ CSŐBEN FELLÉPŐ NYOMATÉKOK MEGHATÁROZÁSA EGYENLETESEN MEGOSZLÓ TERHELÉS ESETÉN*

A 16. ábrán látható vékonyfalú csőre p intenzitású egyenletesen megoszló terhelés hat. Meghatározandó *a veszélyes O, C, A pontokban keletkező nyomaték.*

Castigliano tétele szerint az alakváltozási munka parciális differenciálhányadosa** az erő, vagy a nyomaték szerint az erő, illetve nyomaték okozta elmozdulás, illetve elfordulás nagyságát adja meg. *Reakció* erő, illetve reakció nyomaték esetében zérus elmozdulást, illetve elfordulást kapunk.



16. ábra

Ha tehát a 16. ábrán látható csövet az O pontban az alkotó mentén elvágva és A-ban befalazva képzeljük, és az eltávolítva képzelt rész hatását az elvágás helyén H reakcióerővel és M_r reakciónyomatékkal pótoljuk, akkor felírható, hogy:

$$\frac{\partial L}{\partial H} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial L}{\partial M_r} = 0. \tag{1}$$

A *teljes alakváltozási munka differenciálja* a mechanika tanítása szerint:

$$dL = \frac{P^2}{2EF} ds + \frac{N^2}{2gF} ds + \frac{M^2}{2EI} ds,$$

ahol az első tag a nyomásból, a második a nyírásból, a harmadik pedig a hajlításból származó alakváltozási munka differenciálját jelenti. Az első két tag esetünkben a harmadik mellett *elhanyagolható*, tehát a továbbiakban:

$$dL = \frac{M^2}{2EI} ds. \tag{2}$$

az (1) és (2) összevetéséből nyerjük, hogy:

$$\frac{\partial L}{\partial H} = \int_0^{R\pi} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial M_r} = \int_0^{R\pi} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_r} ds = 0, \tag{4}$$

A *hajlító nyomaték* kifejezése:

$$M = M_r + H y + M_k,$$

ahol M_k külső erők nyomatéka.

Ebből:

$$\frac{\partial M}{\partial H} = y \quad \text{és} \quad \frac{M}{M_r} = 1.$$

Ezzel a (3) és (4) az alábbi alakban írható:

$$\int_0^{R\pi} My\, ds = 0, \quad \text{vagyis} \quad \int_0^{R\pi} (M_r + H y + M_k)\, y ds = 0 \tag{5}$$

* *Németh:* Csatornázás.
** A parciális deriváltakról bővebben az A. VII. kötetben.

és

$$\int_0^{R\pi} M\, ds = 0, \quad \text{vagyis} \quad \int_0^{R\pi} (M_r + H\, y + M_k)\, ds = 0. \tag{6}$$

Célszerű most áttérni *polárkoordinátákra*. A 16. ábra szerint:

$$ds = R\, d\varphi, \quad y = R\,(1 - \cos\varphi), \quad x = R \sin\varphi.$$

Ezen értékeket az (5)-be behelyettesítve, nyerjük:

$$R^2 M_r \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi + HR^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)^2\, d\varphi + R^2 \int_0^{\pi} M_k\,(1 - \cos\varphi)\, d\varphi = 0;$$

innen:

$$M_r + \frac{3}{2} HR = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M_k\, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M_k \cos\varphi\, d\varphi. \tag{7}$$

Ugyanígy a (6)-ból kapjuk:

$$M_k R\, \pi + H R^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi + R \int_0^{\pi} M_k\, d\varphi = 0;$$

innen:

$$M_r + HR = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} M_k\, d\varphi. \tag{8}$$

Bevezetve az

$$\int_0^{\pi} M_k\, d\varphi = I_1 \quad \text{és} \quad \int_0^{\pi} M_k \cos\varphi\, d\varphi = I_2$$

jelöléseket, a (7) és (8) a következő alakban írható:

$$M_r + \frac{3}{2} H R = -\frac{1}{\pi} I_1 + \frac{1}{\pi} I_2 \tag{9}$$

és

$$M_r + H R = -\frac{1}{\pi} I_1. \tag{10}$$

Az I_1 és I_2 integrálok a külső terhelés ismeretében meghatározhatók. Jelen példában a *külső terhelés egyenletesen megoszló*. Ennek megfelelően az M_k nyomaték

a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ közön:

$$M_k = p\, R \sin\varphi \,\frac{R \sin\varphi}{2} = \frac{p}{2} R^2 \sin^2\varphi$$

a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ közön pedig:

$$M_k = pR\left(R \sin\varphi - \frac{R}{2}\right) = \frac{p}{2} R^2\,(2 \sin\varphi - 1).$$

Ezek figyelembevételével az I_1 és I_2 integrál így alakul:

$$I_1 = \int_0^\pi M_k \, d\varphi = \frac{p}{2} R^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2 \sin \varphi - 1) \, d\varphi \right] =$$

$$= \frac{pR^2}{2} \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{pR^2}{2} \left[-2 \cos \varphi - \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{pR^2}{2} \left[\frac{\pi}{4} \right] - \frac{pR^2}{2} \left[2 - \frac{\pi}{2} \right] = 1{,}215 \frac{pR^2}{2},$$

továbbá

$$I_2 = \int_0^\pi M_k \cos \varphi \, d\varphi = \frac{pR^2}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi \, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \varphi \, d\varphi \right] =$$

$$= \frac{pR^2}{2} \left\{ \left[\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin^2 \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[\sin \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right\} = \frac{pR^2}{2} \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) = \frac{pR^2}{6}.$$

Az I_1-re és I_2-re kapott értékeket behelyettesítve a (9) és (10)-es egyenletbe, ezt kapjuk:

$$M_r + \frac{3}{2} H R = - \frac{1{,}215}{2\pi} pR^2 + \frac{1}{6\pi} pR^2,$$

valamint

$$M_r + HR = - \frac{1{,}215}{2\pi} pR^2.$$

Ezen lineáris egyenletrendszerből az ismeretlen M_r-re, ill. H-ra a következő érték adódik:

$$H = 0{,}1061 \, pR, \quad \text{ill.} \quad M_r = - 0{,}2994 \, pR^2$$

Ha vizsgálatainkat hasonló módon a C és A pontra is elvégezzük, akkor

$$M_C = + 0{,}3067 \, pR^2$$

és

$$M_A = - 0{,}5872 \, pR^2$$

eredményt kapunk. Az M_A csak pontszerű alátámasztás esetén igaz, a cső viszont egy körív mentén fekszik fel; ezért ezt az értéket nem vesszük figyelembe. A gyakorlatban az

$$|M_r| = |M_C| \approx 0{,}30 \, pR^2$$

értékkel számolunk.

e) Középértéktételek. Függvény-középértékek. Integrálok becslése

Középértéktételek*

α) Az integrálszámítás első középértéktétele

Ha az $a \leq x \leq b$ közön $\varphi(x)$ *integrálható* és *előjelét nem váltja*, pl. $\varphi(x) \geq 0$, továbbá $f(x)$ ott *folytonos*, akkor van egy, e közbe eső ξ érték, amelyre áll:

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad \text{azaz} \quad f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx}, \quad a \leq \xi \leq b.$$

Bár a ξ helyzete nem ismeretes, a tétel mégis jelentős, elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt.

Ha $f(x)$ ott *nem folytonos*, csak $m \leq f(x) \leq M$ módon *korlátos*, akkor:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad \text{ahol} \quad m \leq \mu \leq M.$$

β) Az integrálszámítás Bonnet-féle középértéktétele

Ha az $a \leq x \leq b$ közön $f(x)$ és $\varphi(x)$ *integrálható* függvények, amelyek közül $\varphi(x)$ *monoton csökkenő, nem-negatív*, tehát $\varphi(a) > \varphi(b) \geq 0$, akkor van egy, e közbe eső ξ érték, amelyre áll:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx, \quad a \leq \xi \leq b.$$

Ha ugyanazon közön $\varphi(x)$ *monoton növekvő, nem-negatív*, tehát $\varphi(b) > \varphi(a) \geq 0$, akkor:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx, \quad a \leq \xi \leq b.$$

(E képleteket *Bonnet*-formuláknak is nevezik.)

γ) Az integrálszámítás második középértéktétele

Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $a \leq x \leq b$ közön *integrálható* függvények, s közülük $\varphi(x)$ *monoton*, akkor van egy, e közbe eső ξ-érték, amelyre áll:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx, \quad a \leq \xi \leq b.$$

* L. pl. Фихтенгольц i. m. II. k., 133. és köv. o.

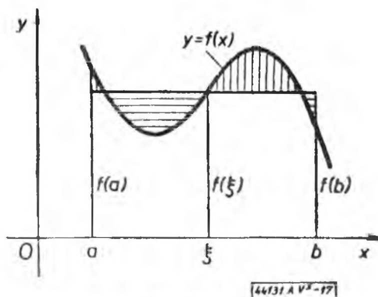
Függvény-középértékek*

δ) A függvény középértéke

Ha az α) alatti tételben $\varphi(x) = 1$, azaz $\int_a^b \varphi(x)\,dx = b - a$, akkor:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a), \quad \text{azaz} \quad f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{ahol } a \leq \xi \leq b.$$

Ezt az $f(\xi)$-értéket *az $f(x)$ függvény $a \leq x \leq b$ közre vonatkozó középértékének* nevezzük. *Geometriailag* $f(\xi)$ azon $(b-a)$ alapú *téglalap* magassága, melynek *területe* megegyezik az $a \leq x \leq b$ közön az $f(x)$ görbéje alatti területtel (17. ábra). Ilyen értelemben szoktunk beszélni változó hőmérséklet, nyomás, sebesség, feszültség egy időközre vonatkozó középértékéről.



17. ábra

Ha $f(x)$ ott *nem folytonos*, úgy:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a), \quad m \leq \mu \leq M.$$

Az $f(\xi)$, illetve μ középértéket az $f(x)$ függvény $[a, b]$ szakaszra vonatkozó *számtani* (v. aritmetikai) *közepének* is nevezik, mint az elemekből ismert számtani közép általánosítását; ugyanis $b - a = n\,\Delta x$, esetén:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

ε) A függvény kvadratikus (effektív) középértéke

Nem egyéb, mint *a függvény négyzetének középértékéből vont négyzetgyök:*

$$\bar{f} = +\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

Az $a \leq x \leq b$ közön (szakaszonként) *folytonos $f(x)$ függvény* e közre vonatkozó *középértéke kvadratikus középértékénél nagyobb nem lehet;* e két középérték csak akkor egyenlő, ha $f(x)$ (szakadási helyeit kivéve) állandó. Tehát:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

* L. pl. *Stachó* i. m. 186. és köv. o.

Ez utóbbi egyenlőtlenség az ι) alatt ismertetendő *Schwarz—Bunjakovszkij*-féle egyenlőtlenség fontos következménye.

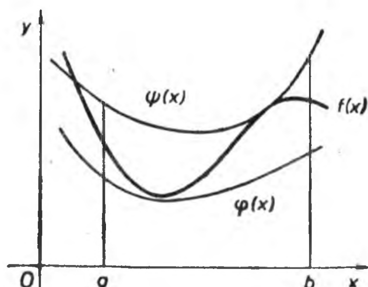
A kvadratikus középérték *jelentős szerepet játszik* pl. a váltakozó áramok elméletében, a hibaelméletben stb.

Integrálok becslése*

ζ) **Egyenlőtlenségek integrálhatósága**

Ha az $a \leq x \leq b$ közön $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ (18. ábra) és ott *mindhárom függvény integrálható*, akkor áll:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \psi(x)\,dx.$$



18. ábra

Az egyenlőség jele elhagyható, ha a köz valamely szakaszán az $f(x) - \varphi(x)$ és $\psi(x) - f(x)$ különbség pozitív, azaz > 0.

Az egyenlőtlenségek tehát *integrálhatók*. Viszont nem differenciálhatók!

η) **Integrálok becslése**

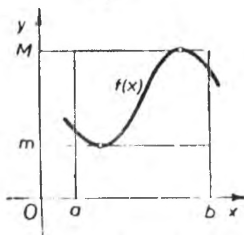
Ha az $[a, b]$ szakaszon az $f(x)$ *maximuma* M és *minimuma* m, az az e szakaszon $m \leq f(x) \leq M$, akkor a ξ) szerint $[\varphi(x) = m,\ \psi(x) = M]$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

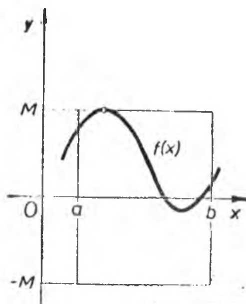
ϑ) **Integrálok abszolút értékének becslése**

Ha az $[a, b]$ szakaszon $|f(x)| \leq M$, vagy másként $-M \leq f(x) \leq +M$, akkor a ζ) értelmében $[\varphi(x) = -M$ és $\psi(x) = +M]$:

$$-M(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq +M(b-a),$$



19. ábra



20. ábra

* L. pl. *Bermant* i. m. I. k., 294. és köv. o.

azaz

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a).$$

Az η) és ϑ) *geometriai jelentését* a 19. és 20. ábrán szemlélhetjük.

ι) A Schwarz–Bunjakovszkij-féle egyenlőtlenség

Ha $f(x)$ és $\varphi(x)$ az $a \leq x \leq b$ közön szakaszonként *folytonos*, akkor:

$$\left[\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)\,dx.$$

Az *egyenlőség* csak akkor következik be, ha (végesszámú pont kivételével) $f(x) = C\,\varphi(x)$, ahol C egy állandó szám.

Ha $\varphi(x) = 1$, akkor:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx\;(b-a),$$

ami átrendezés után *a közönséges és kvadratikus középérték* fentebbi *egyenlőtlenségét* adja.

Ha $b - a = n\,h$ és a k-ik részszakaszon $f(x) = a_k$ és $\varphi(x) = b_k$ állandó, akkor a

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\,b_k\right]^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

Cauchy-féle egyenlőtlenségre jutunk.

Példák és feladatok

α—γ | 1—3. Szemléltessük az α)—γ)-ban ismertetett középértéktételeket a következő adatok mellett:

$$f(x) = x^3, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

ad α) A $\varphi(x)$ az $[1, 2]$ közön *integrálható* és *előjelét nem váltja*, $f(x)$ pedig *folytonos*. Így az *első középértéktétel* szerint:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x^2}{x}\,dx = \int_1^2 x\,dx = \frac{3}{2} =$$

$$= f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx = \xi^2\int_1^2 \frac{dx}{x} = \xi^2 \ln 2\,.$$

Ebből a *középérték és annak helye:*

$$f(\xi)=\xi^2=\frac{3}{2\ln 2} \quad \text{és} \quad \xi=\sqrt{\frac{3}{2\ln 2}}\,.$$

ad *β)* A $\varphi(x)$ *monoton csökkenő* az $1 \leq x \leq 2$ közön, és ugyanott $f(x)$ és $\varphi(x)$ egyaránt *integrálhatók*. Így a *Bonnet-féle középértéktétel* értelmében írhatjuk:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_1^2 \frac{x^2}{x}\,dx=\frac{3}{2}=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx=\frac{1}{1}\int_1^\xi x^2\,dx=\frac{1}{3}(\xi^3-1),$$

azaz

$$\frac{9}{2}+1=\frac{11}{2}=\xi^3.$$

A *középérték és helye* tehát:

$$f(\xi)=\xi^2=\left(\frac{11}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{és} \quad \xi=\sqrt[3]{\frac{11}{2}}\,.$$

ad *γ)* Az $f(x)$ és $\varphi(x)$ *integrálható* és $\varphi(x)$ *monoton* az $1 \leq x \leq 2$ megadott szakaszon, ezért *a második középértéktétel* szerint fennáll:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx=\int_1^2 \frac{x^2}{x}\,dx=\frac{3}{2}=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{1}\int_1^\xi x^2\,dx+\frac{1}{2}\int_\xi^2 x^2\,dx\,.$$

vagyis

$$\frac{3}{2}=\frac{1}{3}(\xi^3-1)+\frac{1}{6}(8-\xi^3),$$

ebből:

$$9=2\xi^3-2+8-\xi^3=6+\xi^3.$$

A középérték és helye tehát:

$$f(\xi)=\xi^2=3^{\frac{2}{3}}\,, \quad \text{és} \quad \xi=\sqrt[3]{3}\,.$$

Figyelemre méltó, hogy ezen *egyszerű esetben* mindhárom középértéket és középértékhelyet meg tudtuk határozni. Mint látható, ezek különböző értékek.

4–6. Előző példánkban az x^2 is *monoton* az [1, 2] szakaszon, ezért dolgozhattunk volna az $f(x)=\frac{1}{x}$, $\varphi(x)=x^2$ választással is. Végezzük el *ez esetre is* a fenti számításokat.

[A *β)* esetben ügyeljünk arra, hogy az előbbi esettel ellentétben a $\varphi(x)$ itt *monoton növekvő, nem-negatív* függvény.]

*7. Az *első középértéktétel* szerint:

$$\int_a^b \sin x \cos x \, dx = \cos \xi \int_a^b \sin x \, dx, \quad (0 \leq a < b \leq \pi).$$

Mutassuk meg, hogy $\cos \xi = \frac{1}{2}(\cos a + \cos b)$ és $a < \xi < b$.

Integráljuk mindkét oldalt:

$$\int_a^b \sin x \cos x \, dx = \left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_a^b = \frac{1 - \cos 2b - 1 + \cos 2a}{4},$$

és

$$\int_a^b \sin x \, dx = [-\cos x]_a^b = \cos a - \cos b.$$

Ezekből:

$$\frac{1}{4}(\cos 2a - \cos 2b) = \cos \xi(\cos a - \cos b).$$

Innen (mivel a $[0, \pi]$ intervallumban $\cos a \neq \cos b$):

$$\cos \xi = \frac{1}{4} \frac{\cos 2a - \cos 2b}{\cos a - \cos b} = \frac{1}{4} \frac{\cos^2 a - \sin^2 a - \cos^2 b + \sin^2 b}{\cos a - \cos b} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{-1 + 2\cos^2 a + 1 - 2\cos^2 b}{\cos a - \cos b} = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\cos a - \cos b} = \frac{1}{2}(\cos a + \cos b).$$

Mivel $\cos a > \cos b$, ha $0 \leq a < b \leq \pi$, így $\cos \xi$ a kettő számtani közepe lévén:

$$\cos a > \cos \xi > \cos b \text{ és megfelelően } a < \xi < b.$$

δ 1. Határozzuk meg az e^x függvény *középértékét* a $[-1, +1]$ intervallumban.

A megadott formula szerint a kérdezett középérték:

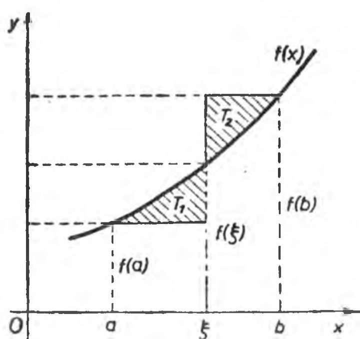
$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{+1} e^x \, dx = \frac{1}{2} [e^x]_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}) = sh\, 1 \approx 1{,}175\ldots$$

Az eredményből láthatóan nem derül ki, hogy az $y = e^x$ folytonos függvény e középértékét hol veszi fel. Függvénytáblázatból kiolvashatjuk, hogy e hely közelítőleg:

$$\xi \approx 0{,}16.$$

2. Az $y = f(x)$ görbe $[a, b]$ szakaszmenti darabjához keressük meg azon ξ *helyet*, hogy a 21. ábrán sraffozással jelölt T_1 és T_2 *területek egyenlők* legyenek $[f(a) \neq f(b)]$.



21. ábra

Nyilván:

$$T_1 = \int_a^\xi f(x)\,dx - (\xi - a) f(a)$$

és

$$T_2 = (b - \xi) f(b) - \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

A feltétel szerint e kettő egyenlő, tehát:

$$\int_a^\xi f(x)\,dx - (\xi - a) f(a) = (b - \xi) f(b) - \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Rendezve, továbbá figyelembe véve, hogy

$$\int_a^\xi f(x)\,dx + \int_\xi^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad [\text{l. c. } \alpha_2)],$$

és ξ-t kifejezve kapjuk:

$$\xi = \frac{a f(a) - b f(b)}{f(a) - f(b)} + \frac{1}{f(a) - f(b)} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ez *geometriailag* azon ξ helyet jelenti, melyre

$$[f(b) - f(a)]\,\xi = \int_{f(a)}^{f(b)} \varphi(y)\,dy,$$

ahol $x = \varphi(y)$ az $y = f(x)$ inverze, vagyis az $f(b) - f(a)$ alapú, ξ magasságú téglalap területe egyenlő az $y = f(x)$ görbe (illetve $x = \varphi(y)$ inverzgörbe) és az y-tengely közötti területtel az $[a, b]$ (illetve $[f(a), f(b)]$) szakaszon.

3. Az előző feladat eredményét alkalmazzuk az

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

parabola esetére.

Itt:

$$f(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma,$$

$$f(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma$$

és

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha\int_a^b x^2\,dx + \beta\int_a^b x\,dx + \gamma\int_a^b dx =$$

$$= \frac{\alpha}{3}(b^3 - a^3) + \frac{\beta}{2}(b^2 - a^2) + \gamma(b - a).$$

Ezekkel:

$$\xi = \frac{\alpha a^3 + \beta a^2 + \gamma a - \alpha b^3 - \beta b^2 - \gamma b + \frac{\alpha}{3}(b^3 - a^3) + \frac{\beta}{2}(b^2 - a^2) + \gamma(b - a)}{\alpha a^2 + \beta a + \gamma - \alpha b^2 - \beta b - \gamma}$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, és $(a - b)$-vel egyszerűsítve:

$$\xi = \frac{\frac{\beta}{2}(a + b) + \frac{2\alpha}{3}(a^2 + ab + b^2)}{\beta + \alpha(a + b)}.$$

4 Hasonló a feladat az $y = qx^n$ $(n \neq -1)$ görbe esetére.

Esetünkben:

$$f(a) = qa^n;\ f(b) = qb^n;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = q\,\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n + 1};$$

így:

$$\xi = \frac{qa^{n+1} - qb^{n+1} + q\,\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}}{qa^n - qb^n}.$$

Egyszerűsítés és az emeletes tört eltávolítása után:

$$\xi = \frac{n}{n + 1}\,\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}.$$

Az eredmény q-*tól*, tehát *a parabola* y-*tengely irányában való megnyújtásától független*

5. Oldjuk meg az előző feladatot $n = -1$ esetére!

6. Vizsgáljuk az eddigiek mintájára az $y = e^x$ függvény görbéjét x és $x + h$ abszcisszák között, és legyen $\xi = x + \vartheta h$ alakú, ahol $0 < \vartheta < 1$. Mutassuk ki számítással, hogy ϑ *csak a* h-*tól függ* és számítsuk ki ϑ értékét a $h = 1$ speciális esetre.

Itt (a 2. példa szerint):

$$x + \vartheta h = \frac{x e^x - (x + h)\,e^{x+h}}{e^x - e^{x+h}} + \frac{1}{e^x - e^{x+h}}\int_x^{x+h} e^x\,dx =$$

$$= \frac{x e^x - (x + h)\,e^{x+h} + e^{x+h} - e^x}{e^x - e^{x+h}}.$$

Rendezve:

$$\vartheta = \frac{1}{h}\,\frac{x e^x - (x+h)\,e^{x+h} + e^{x+h} - e^x - xe^x + xe^{x+h}}{e^x - e^{x+h}} =$$

$$= \frac{e^h - he^h - 1}{1 - e^h}\,\frac{1}{h} = \frac{e^h(h-1)+1}{(e^h-1)\,h}\,.$$

E kifejezés láthatóan csak h-tól függ. — A speciális $h = 1$ esetben:

$$\vartheta = \frac{1}{e-1} \approx 0{,}582.$$

7. Az *ellipszis* polárkoordinátás egyenlete:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}\,,$$

ahol a pólus az x-tengely negatív felén lévő fókusz, $p = \frac{b^2}{a}$ a félparaméter, $\varepsilon = \frac{c}{a}$ az excentricitás, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ a fél-fókusztávolság.

Mekkora *az ellipszis összes rádiuszvektorainak középértéke* a polárszögre vonatkozólag?

Az e) δ) szerint:

$$f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{p\,d\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi} = \frac{p}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi}\,.$$

A $t = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ helyettesítéssel [A. IV. kt. 2. §. b) β)]:

$$f = \frac{2p}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1-\varepsilon)+(1+\varepsilon)\,t^2}\,;$$

további $t\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} = u$ helyettesítéssel:

$$f = \frac{2p}{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b\,.$$

8. Jelöljük $n(t)$-vel az

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

ellipszis normálisainak az origótól való távolságát. Számítsuk ki ezen $n(t)$ függvénynek a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ szögre vonatkozó aritmetikai *középértékét*!

Először is írjuk fel a *normális egyenletét* [(ξ, η)-val jelölve a futópont koordinátáit].

Mivel

$$\dot{y} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{b}{a}\frac{\cos t}{\sin t},$$

ezért a normális egyenlete (A. III. kt. 27. o.):

$$\eta - b\sin t = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t\,(\xi - a\cos t),$$

vagy 0-ra redukálva:

$$-a\sin t\cdot\xi + b\cos t\cdot\eta + (a^2-b^2)\sin t\cos t = 0.$$

A normálisnak az origótól való *távolsága* egyenletünk *Hesse*-féle normálalakjából:*

$$n(t) = \frac{(a^2-b^2)\sin t\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}.$$

A $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ közben a számtani közép:

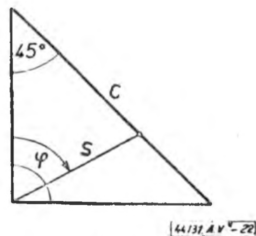
$$f = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} n(t)\,dt = \frac{2}{\pi}(a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}(a-b).$$

Ha $a = b$, vagyis kör esetén $f = 0$, összhangban azzal, hogy ott valamennyi normális az origón megy át.

9. Valamely c átfogójú, derékszögű egyenlőszárú háromszögben a derékszög csúcspontját összekötjük az átfogó pontjaival. Határozzuk meg ezen *s összekötő szakaszok számtani középértékét!* Válasszuk független változónak az egyik befogó melletti φ szöget (22. ábra).

Az adott háromszögben a *befogók* hossza nyilván: $\frac{c}{\sqrt{2}}$, a két hegyesszög pedig: $\frac{\pi}{4}$. A *sinus-tétel* értelmében (22. ábra):



22. ábra

$$\frac{s}{\frac{c}{\sqrt{2}}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\varphi\right)},$$

figyelembe véve, hogy $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, továbbá $\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\varphi\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\right] =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right);$

* A *Hesse*-féle alakról l. bővebben az A. IX. kötetben.

így kapjuk:

$$s = \frac{c}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} = \frac{c}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} .$$

A középérték tehát:

$$f = \frac{c}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)} .$$

A $\frac{\pi}{4} - \varphi = t$ helyettesítés után:

$$f = \frac{c}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} = \frac{2c}{\pi} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

[A IV. kt. 2. §. a. β) 16. pld.]. A kérdezett középérték végül:

$$f = \frac{2c}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} = \frac{2c}{\pi} \ln \frac{\cos \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{8}} =$$

$$= \frac{2c}{\pi} \ln \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{1 - \cos \frac{\pi}{4}}} = \frac{2c}{\pi} \ln \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{2c}{\pi} \ln \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{2c}{\pi} \ln \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4 - 2}} = \frac{2c}{\pi} \ln (\sqrt{2} + 1) \approx 0{,}561\, c .$$

e | 1. Meghatározandó *a lemniszkáta rádiuszvektorának kvadratikus középértéke* a $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ közre vonatkozólag.

A görbe egyenlete *Descartes*-féle koordinátarendszerben:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

polárkoordinátarendszerben pedig:

$$r^4 = r^2a^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

azaz

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi .$$

A megadott formula szerint az $r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ üggvény *középértéke* a φ változó $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ szakaszára vonatkozólag:

$$R = +\sqrt{\frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi} = \sqrt{\frac{1}{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)}\,a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi} =$$

$$= a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}} = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 1 \approx 0{,}797a.$$

Táblázat segítségével közelítőleg meghatározható azon φ_0 érték is, melynél r ezen kvadratikus középértékét felveszi; ennek pontos helyéről a formula nem ad felvilágosítást.

$$R = 0{,}797a = a\sqrt{\cos 2\varphi_0},$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\,[\text{arc}\cos(0{,}797)^2] \approx 0{,}44.$$

ζ 1. Bizonyítandó alkalmas *becslő integrálok* segítségéve [a ζ) szerint], hogy:

$$0 < \int_{10}^{20}\frac{x^2\,dx}{x^4 + x + 1} < \frac{1}{20}.$$

Mivel $0 < x^4 < x^4 + x + 1$, ha $x > 0$ (s így a $10 \leq x \leq 20$ esetben is), ezért

$$0 < \frac{x^4}{x^4 + x + 1} < 1,$$

következésképpen

$$0 < \frac{x^2}{x^4 + x + 1} < \frac{1}{x^2}.$$

Bevezetve a

$$\varphi(x) = 0, \quad f(x) = \frac{x^2}{x^4 + x + 1}, \quad \psi(x) = \frac{1}{x^2}$$

elöléseket, *a megadott formula felhasználásával* kapjuk:

$$\int_{10}^{20} 0\,dx < \int_{10}^{20}\frac{x^2}{x^4 + x + 1}\,dx < \int_{10}^{20}\frac{1}{x^2}\,dx\,;$$

a két szélső integrálást elvégezve a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Ennek a becslésnek nagy *előnye*, hogy az eredeti nehezen és hosszadalmasan számítható integrál helyett könnyen és gyorsan számítható integrálokka dolgozhatunk. Persze e becslés csak akkor értékes, ha a fellépő *hiba* megengedhető.

Ha pl. a szóbanforgó integrál I értékét a fentebb igazolt korlátok $\left(0, \frac{1}{20} = 0{,}05\right)$ számtani közepével $\left(\frac{1}{40} = 0{,}025\right)$ egyenlőnek tetelezzük fe, akkor a H hiba e legkedvezőbb esetben nyilván:

$$H < \frac{1}{40} = 0{,}025$$

Bármilyen más feltevés mellett ennél nagyobb hibával kell számolnunk; a legkedvezőtlenebb esetben a hiba:

$$H_{max} = \frac{1}{20} = 0{,}05 .$$

2. *Becsüljük meg* az $I = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx$ integrál értékét!

Legyen $\varphi(x) = 1$ és $\psi(x) = e^{-x}$, ekkor a $0 \leq x \leq 1$ szakaszon $0 \leq x^2 \leq x$, ezért.

$$\int\limits_0^1 \varphi(x) \geq I \geq \int\limits_0^1 \psi(x)\, dx ,$$

azaz

$$\int\limits_0^1 1\, dx \geq \int\limits_0^1 e^{-x^2}\, dx \geq \int\limits_0^1 e^{-x}\, dx .$$

Elvégezve a bal- és jobboldali integrálásokat, kapjuk:

$$1 \geq I \geq \left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e} .$$

3. Kimutatandó alkalmas *becslő integrálok* segítségével a ζ) szerint, hogy:

$$0 < \int\limits_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\, dx < \frac{1}{20} .$$

Vezessük be az $f_1(x) = x^{19}$, $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^6}}$ jelöléseket. Az $f_2(x)$ láthatóan monoton fogyó a $0 \leq x \leq 1$ közben, ugyanott maximuma

$$f_2(x)_{\max} = 1.$$

Ennélfogva az említett szakaszon fennáll a következő *egyenlőtlenség*:

$$0 = \varphi(x) \leq f_1(x)\, f_2(x) = f(x) < f_1(x) = \psi(x) .$$

Ezen egyenlőtlenséget [a ζ) értelmében] integrálva, nyerjük:

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,dx < \int_0^1 x^{19}dx.$$

A szélső integrálást elvégezve, éppen a kiindulási egyenlőtlenséget kapjuk.

Az egyenlőség jelét itt elhagyhattuk, mert az adott szakasz $\varepsilon \leqq x \leqq 1$ részszakaszán ($\varepsilon > 0$):

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}} - 0 > 0, \text{ és } \psi(x) - \varphi(x) = x^{19} - 0 > 0.$$

L. a ζ)-hoz fűzött megjegyzést.)

η | 1. *Becsüljük meg alulról és felülről,* az integrálandó adott szakaszbeli maximumának és minimumának segítségével [az η) alapján] az

$$I = \int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}\,dx$$

integrál értékét!

Itt az adott szakasz [0, 2]. Először meg kell határoznunk *e szakaszon a függvény maximumát és minimumát*

Keressük tehát az ismert módon (l. A. III. k. 7. és 8. §-at) az $f(x) = \dfrac{5-x}{9-x^2}$ függvény szélsőértékeit. A függvény

$$f'(x) = \frac{-(9-x^2)+2x(5-x)}{(9-x^2)^2} = -\frac{x^2-10x+9}{(9-x^2)^2}$$

deriváltjának zérushelyein lehet szó szélsőértékről, vagyis az

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = 1\ ;\ 9$$

helyeken. Ezek közül csak az $x = 1$ érték jön számításba, minthogy csak ez esik bele az adott [0, 2] szakaszba.

A második derivált segítségével megállapíthatjuk, hogy a függvénynek itt minimuma van, éspedig

$$m = f(1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

A szakaszon e helytől akár jobbra, akár balra haladva a függvény monoton növekszik. A függvény e szakaszbeli maximuma tehát a szakasz végpontjain felvett függvényértékek nagyobbikával egyenlő. A szakasz végpontjain $f(0) = \dfrac{5}{9}$, illetve $f(2) = \dfrac{3}{5}$, így a keresett maximum: $M = \dfrac{3}{5}$. *Az adott formula felhasználásával* írhatjuk tehát:

$$2 \cdot \frac{1}{2} < I \leq 2 \cdot \frac{3}{5},$$

azaz

$$1 \leq I \leq 1{,}2.$$

Az integrál értékét $I = 1{,}1$-nek tételezve fel, a hiba $H \leq 0{,}1$.

Pontos számítással:

$$I = \int_0^2 \left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3+x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3-x}\right)\right] dx =$$

$$= \left[\ln \sqrt[3]{\frac{(3+x)^4}{3-x}}\right]_0^2 = \ln \sqrt[3]{\frac{\frac{5^4}{1}}{\frac{3^4}{3}}} = \ln \frac{1}{3}\sqrt[3]{625} \approx 1{,}0472\ldots$$

2. Az előző példában látott módon *becsüljük meg* az

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

integrál értékét. (L. hátul!)

3. Az 1. példa eljárását követve *becsüljük meg* az

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

integrál értékét.

ϑ | 1. Legyen $f(x) = e^{-x} \cos x$ és $0 \leq x \leq \pi$. Ez esetben nyilván

$$f(x) \leq 1$$

az egész $[0, \pi]$ szakaszon, így a $\vartheta)$ szerint fennáll:

$$\left|\int_0^\pi e^{-x} \cos x\, dx\right| \leq 1 \cdot (\pi - 0) = \pi.$$

ι | 1. *Becsüljük meg* (felülről) az alábbi integrál értékét:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x \sin x}\, dx\,.$$

Ezen integrál *elemi úton nem számítható ki*. Szembetűnő, hogy *az integrálandó szorzat, s mindkét tényező négyzete igen egyszerűen integrálható*. E körülmény a *Schwarz—Bunjakovszkij-féle egyenlőtlenség* felhasználását sugalmazza.

Az $f(x) = \sqrt{x}$, $\varphi(x) = \sqrt{\sin x}$ választás mellett az egyenlőtlenség így alakul:

$$I^2 < \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b \varphi^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{4}\sqrt{1} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Végül négyzetgyökvonással nyerjük:

$$I < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11\,.$$

2. Az előző példához hasonló eljárással *becsüljük meg* (felülről) az

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

(elemi úton nem megoldható) integrál értékét!

Most az $f(x) = 1$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x^3}$ választással élve, az adott formula szerint írhatjuk:

$$I^2 < \int_0^1 1 \cdot dx \cdot \int_0^1 (1+x^3)\,dx = \frac{5}{4}\,,$$

azaz

$$I < \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Műszaki alkalmazások

1—2. A SZABADESÉS SEBESSÉGÉNEK KVADRATIKUS KÖZÉPÉRTÉKEI

A szabadesés *mozgásegyenlete:* $s = \frac{g}{2}\,t^2$;

a mozgás *sebessége,* mint az *idő* függvénye: $v = gt$;

a *sebesség,* mint az *út* függvénye: $v = \sqrt{2gs}$.

Keressük meg a sebesség négyzetének középértékét az időre és az útra vonatkozólag!

A v^2 középértéke a 0-tól T-ig terjedő időközben:

$$v^2_{t,\,eff} = (v^2)_t = \frac{1}{T}\int_0^T g^2t^2\,dt = \frac{1}{3}\,g^2T^2 = \frac{v^2(T)}{3}\,,$$

azaz *v időbeli kvadratikus középértéke:*

$$v_{t\,eff} = \frac{gT}{\sqrt{3}} = \frac{v(T)}{\sqrt{3}}\,.$$

A v^2 középértéke a 0-tól S-ig terjedő úton:

$$v_{s,eff}^2 = (v^2)_s = \frac{1}{S}\int_0^S 2g\,s\,ds = gS = \frac{v^2(S)}{2},$$

azaz v *útmenti kvadratikus középértéke*.

$$v_{s,eff} = \sqrt{gs} = \frac{v(S)}{\sqrt{2}}.$$

[Megjegyzendő, hogy

$$v(S) = \sqrt{2gS} = \sqrt{2g\frac{g}{2}T^2} = gT = v(T).]$$

E két effektív középérték láthatóan nem egyenlő, hanem

$$v_{s,eff} : v_{t,eff} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ezen effektív középértékeket felhasználhatjuk a szabadon eső test (időbeli és útmenti) *átlagos kinetikai energiájának* kiszámítására. Pl. az útmenti átlag:

$$E_{kin,s} = \frac{m}{2}\frac{1}{S}\int_0^S v^2(s)\,ds = \frac{m}{2}v_{s,eff}^2 = \frac{m}{2}gS = \frac{1}{2}mgS.$$

3. A VAS FAJHŐJÉNEK ÁTLAGÉRTÉKE ADOTT HŐFOKHATÁROK KÖZÖTT

Valamely anyag c fajhője alatt azt a melegmennyiséget értjük, amely szükséges ahhoz, hogy az illető anyag tömegegységének hőmérsékletét 1 C°-szal emeljük. A fajhő pontos értéke a t hőmérséklet függvénye. E függvényt a *vas* esetében a következő képlet határozza meg:

$$c = 0{,}000142\,t + 0{,}1053, \quad 0 \leq t \leq 200 \text{ C°}.$$

Mekkora az adott hőmérsékleti határok között a c_m közepes fajhő?

Az ismertetett módon nyerjük, hogy:

$$c_m = \frac{1}{200}\int_0^{200}(0{,}000142\,t + 0{,}1053)\,dt = \frac{1}{200}\Big[0{,}000071\,t^2 + 0{,}1053\,t\Big]_0^{200} = 0{,}1195.$$

4. A VÁLTAKOZÓ FESZÜLTSÉG ÉS ÁRAMERŐSSÉG EFFEKTÍV ÉRTÉKE ÉS KÖZÉPÉRTÉKE

Amint ismeretes, *az áram hőhatása az áramerősség negyzetével arányos*. Ezért a műszaki gyakorlatban a váltakozó áramok és feszültségek nagyságát gyakran egy teljes periódusra vonatkoztatott négyzetes középértékükkel adják meg.

Legyen az áramkörünk ohmos ellenállása r, az áramerősség pillanatnyi nagysága $i(t)$. Ekkor elemi dt idő alatt fejlődő hő, a *Lenc–Joule-törvény* értelmében: $ri^2(t)\,dt$. Egy

teljes periódus alatt fejlődő hő tehát: $r\int_0^T i^2(t)\,dt$. Jelöljük I-vel azt az *egyenáramot*, amely a T periódus alatt az r ellenálláson *ugyanekkora hőt hoz létre*. Akkor írhatjuk:

$$I^2 r T = r\int_0^T i^2(t)\,dt,$$

amiből

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt}.$$

Az utóbbi egyenlőségből meghatározott I-értéket *a váltakozó áramerősség* **effektív értékének**, vagy **négyzetes középértékének** nevezik.

Szinuszos változás esetén:

$$i = I_0 \sin(\omega t + \psi),$$

tehát:

$$\int_0^T i^2(t)\,dt = I_0^2\int_0^T \sin^2(\omega t + \psi)\,dt = \frac{I_0^2}{2}\int_0^T [1 - \cos(2\omega t - 2\psi)]\,dt =$$

$$= \frac{I_0^2}{2}\int_0^T dt - \frac{I_0^2}{2}\int_0^T \cos(2\omega t + 2\psi)\,dt = \frac{I_0^2}{2}T,$$

mivel a második integrál 0 értékű. Így az áramerősség effektív értéke:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt} = \frac{I_0}{\sqrt{2}},$$

vagyis az I_0 amplitúdó $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$-szerese.

Hasonló módon határozható meg a *váltakozó feszültség effektív értéke* is:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt}.$$

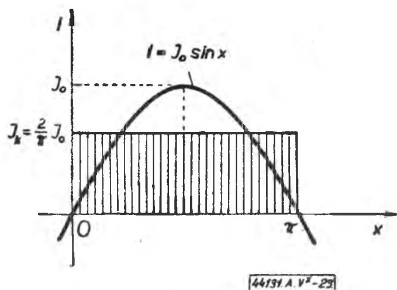
Szinuszos változás esetén:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}.$$

A váltakozó áram erősségét és feszültségét mérő *műszerek legtöbbje ezen effektív értéket mutatja.*

Az effektív értékén kívül néha szerepet játszik *az áramerősség és feszültség* **középértéke** is, amit a továbbiakban k indexszel fogunk jelölni. Az áramerősség, illetve a feszültség $[t_1, t_2]$ időközre vonatkoztatott középértéke alatt a következőt értjük:

$$I_k = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i\, dt, \quad \text{ill.} \quad E_k = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} e\, dt.$$



23. ábra

Szinuszosan váltakozó feszültség és áram esetén a teljes periódusra vonatkoztatott középérték zérussal egyenlő, mivel a pozitív és negatív félhullámok alatti terület nagyságra megegyezik, de ellentett előjelű. Ugyanez megtörténhet nemszinuszos váltakozó feszültségek és áramerősségek esetén is, ha a pozitív és negatív félhullámok alatti területek nagyságra megegyeznek. Ilyen esetekben *a pozitív félhullámra vonatkoztatott középértéket használják* középértékként.

Az utóbbi meghatározás alapján, *szinuszosan változó feszültség és áramerősség esetén* az E_k és I_k *középértékre* a következőt kapjuk (l. a 23. ábrát):

$$E_k = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_0 \sin \omega t\, dt = \frac{2E_0}{\omega T} \left[- \cos \omega t \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{4E_0}{\omega T} = \frac{2}{\pi} E_0,$$

mert $\omega = 2\pi/T$ és hasonlóan:

$$I_k = \frac{2}{\pi} I_0,$$

vagyis az amplitudók $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$-szerese. Látható tehát, hogy az effektív érték valamivel nagyobb, mint a középérték.

5. MÁGNESES FLUXUS ÉS INDUKÁLT FESZÜLTSÉG*

A 24. ábrán különböző $\psi = \psi(t)$ *mágneses fluxusgörbék* és az $e = -\frac{d\psi}{dt}$ formula alapján nekik megfelelő *elektromotoroserő-görbék* láthatók.

Ez utóbbi *görbék* **alaktényezője** alatt *az effektív értékük és* a pozitív félhullámra vonatkoztatott *középértékük hányadosát* értjük. Tehát:

$$k_a = \frac{E}{E_k} = \left[\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2\, dt} \right] : \left[\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e\, dt \right].$$

* L. pl. Калантаров—Нейман i. m.

Szinuszos váltakozás esetén az alaktényező:

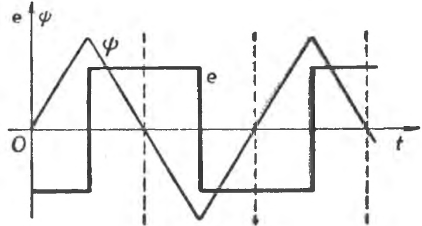
$$k_a = \frac{E}{E_k} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} : \frac{2}{\pi} E_m = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11.$$

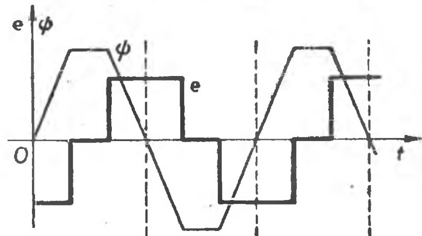
Az említett *görbék* **csúcstényezője** alatt *maximális értékük és effektív értékük hányadosát* értjük, azaz:

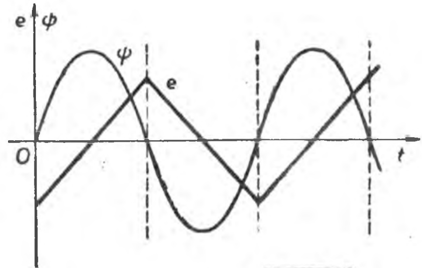
$$k_{cs} = \frac{E_m}{E}.$$

Szinuszos váltakozás esetén a csúcstényező:

$$k_{cs} = \frac{E_m}{E} = E_m : \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$







24. ábra

A k_a és k_{cs} értékei annál nagyobbak, minél hegyesebb a görbe.

Az alaktényező bevezetése után a $\Psi(t)$ váltakozó fluxus átjárta tekercsben **indukált feszültség effektív értéke** meghatározható. Ha a fluxus maximális értékét Ψ_{max}-mal, minimális értékét Ψ_{min}-mal jelöljük, az indukált feszültség *középértékére* a következőt nyerjük:

$$E_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left[-\frac{d\Psi(t)}{dt}\right]dt =$$

$$= -\frac{2}{T}\int_{\Psi_{max}}^{\Psi_{min}} d\Psi = 2f(\Psi_{max} - \Psi_{min}),$$

mivel a középértékeket a pozitív félhullámra számítjuk. Ha a fluxus görbéje szimmetrikus és $\Psi_{min} = -\Psi_{max}$, akkor az indukált feszültség *effektív értéke:*

$$E = k_a E_k = 4f\, k_a \Psi_{max},$$

ahol f a fluxus és az indukált feszültség frekvenciája. *Szinuszos változás esetén:*

$$k_a = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11.$$

Ezze' *az ndukált feszü tség effektív értéke:*

$$E = 4,44\, f\, \Psi_{max}.$$

Más alakban:

$$E = 4,44\, f\, w\, \Phi_{max},$$

ahol $\Psi_{max} = w\,\Phi_{max}$, továbbá w azon tekercs menetszáma, amelyben a feszültség indukálódik, a $\Phi_{m\ x}$ pedig az egy menethez tartozó fluxus maximális értéke. *E formulát használjuk* például *a transzformátor méretezésénél.*

6. NEM SZINUSZOS FESZÜLTSÉGEK ÉS ÁRAMERŐSSÉGEK EFFEKTÍV ÉRTÉKE*

Meghatározandó a *nem-szinuszos váltakozó feszültség effektív értéke és az egyes harmonikusok effektív értéke közötti összefüggés.* Az egyenáramú komponens 0-dik harmonikusnak tekintjük.

A feszültség effektív értéke, amint a 4. példában láttuk:

$$E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt\,.$$

A feszültséget

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_k$$

alakú *Fourier*-sorba** fejtve, négyzetreemelés után azt kapjuk, hogy e^2 *egyes harmonikusok négyzeteiből és kétszeres szorzataiból áll.* Ennek megfelelően E^2 két fajta integrál összege:

$$E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt = \sum \frac{1}{T}\int_0^T e_q^2\,dt + \sum \frac{1}{T}\int_0^T 2e_q\,e_s\,dt,$$

miközben

$$q \neq s \quad \text{és} \quad e_k = E_{km}\sin(k\,\omega t + \psi_k).$$

Vizsgáljuk a következő határozott integrált:

$$\int_0^T 2e_q\,e_s\,dt = E_{qm}\,E_{sm}\int_0^T 2\sin(q\,\omega t + \psi_q)\sin(s\,\omega t + \psi_s)\,dt,$$

ahol q és s pozitív egész számok.

Azt kapjuk, hogy

$$\int_0^T 2\sin(q\,\omega t + \psi_q)\sin(s\,\omega t + \psi_s)\,dt =$$

$$= \int_0^T \cos\,[(q - s)\,\omega t + \psi_q - \psi_s]\,dt - \int_0^T \cos\,[(q + s)\,\omega t + \psi_q + \psi_s]\,dt.$$

A $q \neq s$ esetben a jobboldalon álló mindkét integrál értéke nulla, mivel a szinuszfüggvényeknek periódusuk egészszámú többszörösére számított határozott integrálja nulla. Így a baloldal is zérussal egyenlő. Ezen eredményt alkalmazva a harmonikusok kétszeres szorzataira, nyerjük:

$$\sum \frac{1}{T}\int_0^T 2e_q\,e_s\,dt = 0\,.$$

* L. pl. Калантаров—Нейман i. m.
** L. az A. VIII. és B. VI. kötetekben.

Következésképpen:

$$E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt = \sum \frac{1}{T}\int_0^T e_k^2\,dt = E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \ldots + E_k^2 + \ldots,$$

ami azt jelenti, hogy *a nem-szinuszos feszültség effektív értékének négyzete a harmonikusok effektív értékei négyzeteinek összegével egyenlő.* Eredményünket így is írhatjuk:

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \ldots + E_k^2 + \ldots}\,.$$

Hasonló eredményt kapunk a nem-szinuszos áramerősség effektív értékére:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_k^2 + \ldots}\,.$$

7. A TELJESÍTMÉNY KÖZÉPÉRTÉKE FELHARMONIKUSOK ESETÉN*

Nem-szinuszos feszültség és áramerősség esetén a **közepes teljesítmény:**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T e\,i\,dt\,.$$

Az *e* és *i Fourier*-sorát helyettesítve ezt kapjuk:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T (e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_k + \ldots)(i_0 + i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots)\,dt =$$

$$= \sum \frac{1}{T}\int_0^T e_k\,i_k\,dt + \sum \frac{1}{T}\int_0^T e_q\,i_s\,dt,$$

miközben $q \neq s$. A $q \neq s$ esetén, mint már láttuk.

$$\int_0^T e_q\,i_s\,dt = E_{qm}\,I_{sm}\int_0^T \sin(q\,\omega t + \psi_q)\sin(s\,\omega t + \psi_s)\,dt = 0,$$

tehát

$$\sum \frac{1}{T}\int_0^T e_q\,e_s\,dt = 0\,.$$

Ennélfogva:

$$P = \sum \frac{1}{T}\int_0^T e_k\,i_k\,dt\,,$$

* L. pl. Калантаров Нейман i. m.

ami azt jelenti, hogy *nem-szinuszos áramerősség és feszültség esetén a közepes teljesítmény az egyes harmonikusok közepes teljesítményeinek összege:**

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_k = E_0 I_0 + E_1 I_1 \cos\varphi_1 + E_2 I_2 \cos\varphi_2 +$$
$$+ \ldots + E_k I_k \cos\varphi_k + \ldots,$$

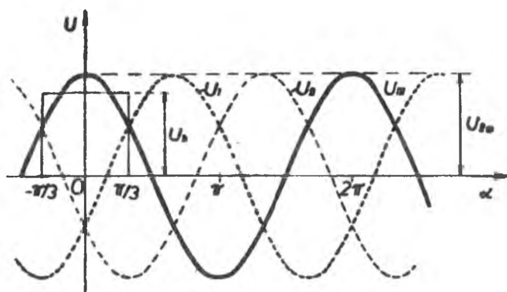
ahol φ_k az $e_k(t)$ és $i_k(t)$ közötti fáziseltolódás szöge. A szinuszosan váltakozó áramok és feszültségek esetéhez hasonlóan bevezethetjük a **teljesítmény-tényezőt**, mint a *hatásos és látszólagos teljesítmények viszonyát*:

$$\frac{P}{EI} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T e\,i\,dt\right] : \left[\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt}\cdot\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}\right].$$

Matematikailag igazolható, hogy *e viszonyszám mindig kisebb* 1-nél, és csak akkor egységnyi, ha e és i arányosak egymással. A műszaki gyakorlatban a teljesítménytényezőt felharmonikusok jelenléte esetén is „$\cos\varphi$"-nek nevezik, bár ebben az esetben a feszültség és az áram görbéi nem hasonlók egymáshoz, ezért a fázisszög közvetlen bevezetése nem lehetséges.

8. VÁLTAKOZÓ ÁRAM EGYENIRÁNYÍTÁSA**

Legyen U_{2m} és U_2 a *transzformátor szekunder fázisfeszültségének* maximális, illetve effektív értéke. U és U_k pedig az *egyenirányított feszültség* effektív és középértéke. Ha m fázisú az egyenirányítás, akkor $\omega t = \alpha$ helyettesítéssel ezt kapjuk (25. ábra):



25. ábra

$$U_k = \frac{m}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} U_{2m}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{m}{\pi}U_{2m}\sin\frac{\pi}{m},$$

illetve

$$U^2 = \frac{m}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{m}}^{+\frac{\pi}{m}} U_{2m}^2\cos^2\alpha\,d\alpha = U_{2m}^2\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{4\pi}\sin\frac{2\pi}{m}\right).$$

Ha $m = 3$, akkor:

$$U_k \approx 0{,}83\,U_{2m} \approx 1{,}17\,U_2 \quad \text{és} \quad U \approx 1{,}02\,U_k.$$

Az utóbbi egyenlőségből látható, hogy *az egyenirányított feszültség effektív és középértéke már háromfázisú egyenirányításnál is alig különbözik egymástól.*

* A. IV. kötet, 6. §. M. a. 4. pl.
** L. pl. Калантаров—Нейман i. m.

f) Numerikus integrálás*

Az alább következő közelítő eljárások akkor használatosak határozott integrálásra (területmérésre), ha *a függvénynek csak a görbéje* diagrammja *ismeretes*, a képletes, analitikus kifejezése nem; vagypedig, ha képlettel adott függvénynél *az integrálás* — akár zárt alakú primitív függvény hiánya, akár bonyolultság miatt — *nehézséget okoz.*

Mindegyiknél az $[a, b]$ *szakaszt osztópontokkal párosszámú*, $2n$ *egyenlő* $h = \frac{b-a}{2n}$ *részre osztjuk!***

α) Téglány-szabály

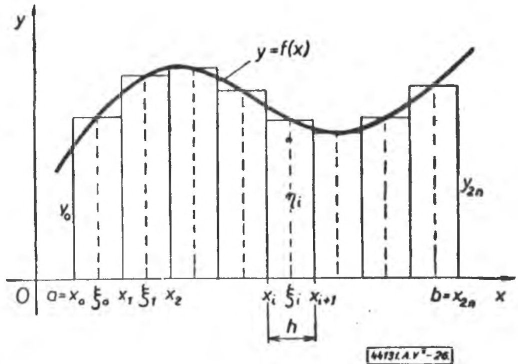
A h szélességű részszakaszok *kezdőordinátáival képzett lépcsőzetes görbe* $[a, b]$ szakaszmenti darabja alatti területet méri:

$$I \approx Q = h(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{2n-1}).$$

Pontosabb, ha a *középordinátákkal* dolgozunk:

$$\eta_i = f(\xi_i), \quad \xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

(26. ábra).



26. ábra

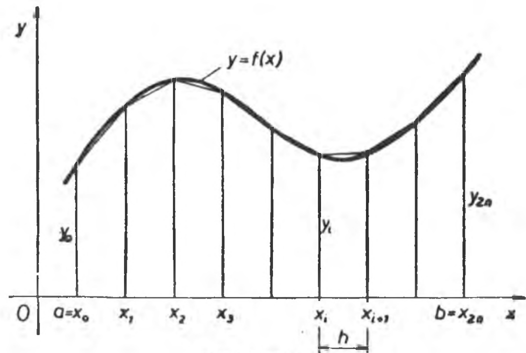
β) Trapéz-szabály

A görbét a h részszakaszok feletti *húrokkal*, a a görbe alatti területet e húrok alatti, h magasságú trapézterületekkel *közelíti* (27. ábra):

$$I \approx T = h\left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \ldots + \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2}\right];$$

rendezve:

$$T = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{2n-1} + \frac{y_{2n}}{2}\right].$$



27. ábra

γ) Érintő-szabály

A görbét az egymást követő *kettős* ($2h$ hosszúságú) részszakaszok felett a középső *érintőkarabjaival*, a területet trapézterületekkel *közelítjük*, melyek középvonala éppen a kettős részszakaszok középső ordi-

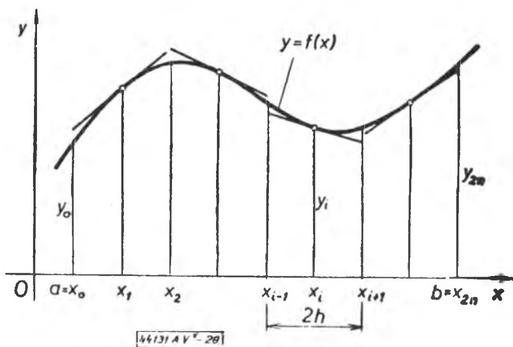
* L. bővebben pl. *Bermant* és *Stachó* i. m.

** A téglány- és trapéz-szabálynál a párosszámú részre osztás nem szükséges!

nátája (28. ábra):

$$I \approx U = 2h\,(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}).$$

(Kevésbbé használatos.)



28. ábra

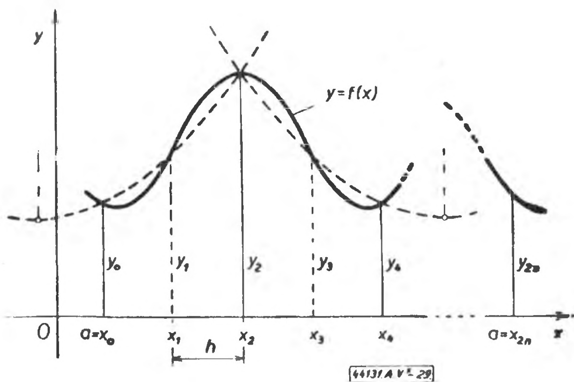
δ) **Simpson-szabály** | Mindezeknél rendszerint *jóval pontosabb Simpson módszere,* amely a kettős (2*h* hosszúságú) részszakaszok felett *a görbét* egy-egy függőleges tengelyű 2. *fokú parabolaívvel pótolja,* mégpedig olyanokkal, amelyek illeszkednek a görbe (x_0, x_1, x_2), (x_2, x_3, x_4), ... $(x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n})$ abszcisszájú pontjaira (29. ábra).

$$I \approx S = \frac{2h}{6}\,(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Konstatálható, hogy:

$$\frac{2T + U}{3} = \frac{1}{3}\,[h\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{2n-1} + y_{2n}) + h(2y_1 + 2y_3 + \ldots + 2y_{2n-1})] = S,$$

azaz *a Simpson-szabály a* (kétszer olyan sűrű beosztásnak megfelelően) *kettős súllyal vett trapéz-szabály és az érintőszabály számtani közepelésével adódik.*



29. ábra

ε) **Hibaképletek*** |

ε_1) A *tégláng-szabálynál:*

$$R_{2n} = \frac{(b-a)^3}{24\,(2n)^2}\,y''(\xi) \qquad a \leq \xi \leq b.$$

ε_2) A *trapéz-szabálynál:*

$$R_{2n} = -\frac{(b-a)^3}{12\,(2n)^2}\,y''(\eta), \quad a \leq \eta \leq b.$$

ε_3) A *Simpson-szabálynál:*

$$R_{2n} = -\frac{(b-a)^5}{180\,(2n)^4}\,y^{(4)}(\zeta) \quad a \leq \zeta \leq b.$$

* L. *Фихтенгольц* i. m. II. k., 183. és köv. o.

*Példák és feladatok**

1. Határozzuk meg az $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \left(= \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ldots\right)$ határozott integrál értékét *a téglány-, a trapéz- és a Simpson-szabály segítségével.* Számítsuk ki továbbá *a hibát* mindegyik esetben!

α) Téglány-szabállyal:

$\xi_0 = 0{,}05,$	$\eta_0 = 0{,}9995$
$\xi_1 = 0{,}15,$	$\eta_1 = 0{,}9780$
$\xi_2 = 0{,}25,$	$\eta_2 = 0{,}9412$
$\xi_3 = 0{,}35,$	$\eta_3 = 0{,}8909$
$\xi_4 = 0{,}45,$	$\eta_4 = 0{,}8316$
$\xi_5 = 0{,}55,$	$\eta_5 = 0{,}7678$
$\xi_6 = 0{,}65,$	$\eta_6 = 0{,}7029$
$\xi_7 = 0{,}75,$	$\eta_7 = 0{,}6400$
$\xi_8 = 0{,}85,$	$\eta_8 = 0{,}5806$
$\xi_9 = 0{,}95,$	$\eta_9 = 0{,}5256$

$$h = 0{,}1; \quad \sum_{i=0}^{9} \eta_i = 7{,}8581$$

$$2n = 10$$

$$Q = 0{,}1 \cdot 7{,}8581 = 0{,}78581.$$

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad y''(x) = 2\,\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$$

A $0 \leq x \leq 1$ közön

$|y''(x)| \leq 2.$ A *hiba* tehát:

$$R_{10} < \frac{(1-0)^3}{24 \cdot 10^2} \cdot 2 = \frac{1}{12} \cdot 10^{-2} =$$

$$\approx 0{,}84 \cdot 10^{-3}$$

β) Trapéz-szabállyal:

$x_0 = 0{,}0,$	$y_0 = 1{,}0000$
$x_{10} = 1{,}0$	$y_{10} = 0{,}5000$

$$\frac{y_0 + y_{10}}{2} = \frac{1{,}5000}{2}$$

$x_1 = 0{,}1,$	$y_1 = 0{,}9901$
$x_2 = 0{,}2,$	$y_2 = 0{,}9615$
$x_3 = 0{,}3,$	$y_3 = 0{,}9174$
$x_4 = 0{,}4,$	$y_4 = 0{,}8621$
$x_5 = 0{,}5,$	$y_5 = 0{,}8000$
$x_6 = 0{,}6,$	$y_6 = 0{,}7353$
$x_7 = 0{,}7,$	$y_7 = 0{,}6711$
$x_8 = 0{,}8,$	$y_8 = 0{,}6098$
$x_9 = 0{,}9,$	$y_9 = 0{,}5525$

$$h = 0{,}1; \quad \sum_{i=1}^{9} y_i = 7{,}0998$$

$$2n = 10$$

$$T = 0{,}1 \left(\frac{1{,}5000}{2} + 7{,}0998\right) = 0{,}78498.$$

A baloldaliak felhasználásával *hiba*:

$$|R_{10}| < \frac{(1-0)^3}{12 \cdot 10^2} \cdot 2 \approx 1{,}7 \cdot 10^{-3}$$

γ) Simpson-szabállyal:

$2n = 4\,(!)$ és $2h = 0{,}5$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{3}{4},$$

$$x_4 = 1; \quad y_0 = 1, \quad 4y_1 = 3{,}76471,$$

$$2y_2 = 1{,}6, \quad 4y_3 = 2{,}56; \quad y_4 = 0{,}5.$$

$$S = \frac{0{,}5}{6}(1 + 3{,}76471 + 1{,}6 + 2{,}56 +$$

$$+ 0{,}5) = 0{,}78539$$

$$y^{(4)}(x) = g^{(5)}(x) =$$

$$= 24 \cos^5 g \sin 5\left(g + \frac{\pi}{2}\right) =$$

* L. Фихтенгольц i. m. II. kt. 178. és köv. o.

$$= 24 \cos^5 g \cos 5g,$$

ahol

$$g(x) = \int_0^x y(x)\, dx = \text{arctg}\, x.$$

A $0 \leq x \leq 1$ közön: $|y^{(4)}(x)| < 24$,

tehát a *hiba:*

$$|R_4| = \frac{(1-0)^5}{180 \cdot 4^4} \cdot 24 = \frac{24}{180 \cdot 16^2} =$$

$$= \frac{1}{1920} < 0{,}0006.$$

Látható, hogy *kisebb n ellenére ezen eredmény a legpontosabb!*

2. Kiszámítandó az $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ $(= \ln 2 = 0{,}69314718\ldots)$ integrál értéke 0,001 pontossággal!

α) Tégläny-szabállyal:

Esetünkben

$$y(x) = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad 0 < y''(x) = \frac{2}{x^3} \leq 2 \quad (\text{amikor } 1 \leq x \leq 2), \text{ tehát a hiba:}$$

$$0 < R_{2n} < \frac{(b-a)^3}{24(2n)^2} \cdot \max_{[a,\,b]} [y''(x)] = \frac{1}{12(2n)^2}.$$

$2n = 10$-zel próbálkozva: $R_{10} < \frac{1}{1200} < 0{,}84 \cdot 10^{-3} = 0{,}00084$, tehát a kívánt pontosság elérésére éppen megfelelő. Ezután nézzük a számítást!

$\xi_0 = 1{,}05$,	$\eta_0 = 0{,}9524$	$\xi_5 = 1{,}55$,	$\eta_5 = 0{,}6452$
$\xi_1 = 1{,}15$,	$\eta_1 = 0{,}8696$	$\xi_6 = 1{,}65$,	$\eta_6 = 0{,}6061$
$\xi_2 = 1{,}25$,	$\eta_2 = 0{,}8000$	$\xi_7 = 1{,}75$,	$\eta_7 = 0{,}5714$
$\xi_3 = 1{,}35$,	$\eta_3 = 0{,}7407$	$\xi_8 = 1{,}85$,	$\eta_8 = 0{,}5405$
$\xi_4 = 1{,}45$,	$\eta_4 = 0{,}6897$	$\xi_9 = 1{,}95$.	$\eta_9 = 0{,}5128$

$$Q = \frac{1}{10} \sum_{i=0}^{9} \eta_i = \frac{1}{10} \cdot 6{,}9284 = 0{,}69284.$$

Így a 4 tizedesjegyű táblára (max. hiba $\pm$ 0,00005) és a fenti hibaszámításra való tekintettel $\ln 2$ a

$$0{,}69284 - 0{,}00005 = 0{,}69279 \text{ és a } 0{,}69|284 + 0{,}00005 + 0{,}00084 = 0{,}69|373$$

értékek közé esik. (Mivel $R_{10} > 0$, az alsó határt nem befolyásolja.)

Tehát írhatjuk:

$$\ln 2 = 0{,}693 \pm 0{,}001.$$

β) Trapéz-szabállyal:

A hibaképlet szerint $y''(x) > 0$ lévén $R_{2n} < 0$ és a fentiek alapján:

$$R_{2n} < \frac{1}{6(2n)^2}$$

Megtartva az előbbi $2n = 10$-et, $|R_{10}| < \frac{1}{600} < 1{,}7 \cdot 10^{-3}$, vagyis az előírtnál kisebb pontossághoz jutunk.

$x_1 = 1{,}1,$	$y_1 = 0{,}9091$	$x_6 = 1{,}6,$	$y_6 = 0{,}6250$
$x_2 = 1{,}2,$	$y_2 = 0{,}8333$	$x_7 = 1{,}7,$	$y_7 = 0{,}5882$
$x_3 = 1{,}3,$	$y_3 = 0{,}7692$	$x_8 = 1{,}8,$	$y_8 = 0{,}5556$
$x_4 = 1{,}4,$	$y_4 = 0{,}7143$	$x_9 = 1{,}9,$	$y_9 = 0{,}5263$
$x_5 = 1{,}5,$	$y_5 = 0{,}6667$		

$$\sum_{i=1}^{9} y_i = 6{,}1877$$

$x_0 = 1$ $\quad y_0 = 1{,}0000$

$x_{10} = 2$ $\quad y_{10} = 0{,}5000$

$$\frac{y_0 + y_{10}}{2} = \frac{1{,}5000}{2}$$

$$T = \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2} + 6{,}1877\right) = 0{,}69377$$

A fenti módon ($R_{10} < 0$):

$$0{,}69377 - 0{,}00005 - 0{,}00170 = 0{,}69|202 <$$
$$< \ln 2 < 0{,}69377 + 0{,}00005 = 0{,}69|382,$$

azaz írhatjuk:

$$\ln 2 = 0{,}693 \pm 0{,}001.$$

γ) Simpson-szabállyal:

$$y^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}; \quad R_{2n} < 0; \quad |R_{2n}| \le \frac{1}{180\,(2n)^4} \cdot 24 = \frac{2}{15\,(2n)^4}.$$

A $2n = 10$-et megtartva, $|R_{10}| < 1{,}4 \cdot 10^{-5}$, vagyis kiváló pontossághoz jutunk! Érdemes 5-jegyű táblával dolgozni.

$x_2 = 1{,}2,$	$y_2 = 0{,}83333$	$x_1 = 1{,}1,$	$y_1 = 0{,}90909$
$x_4 = 1{,}4,$	$y_4 = 0{,}71429$	$x_3 = 1{,}3,$	$y_3 = 0{,}76923$
$x_6 = 1{,}6,$	$y_6 = 0{,}62500$	$x_5 = 1{,}5,$	$y_5 = 0{,}66667$
$x_8 = 1{,}8,$	$y_8 = 0{,}55556$	$x_7 = 1{,}7,$	$y_7 = 0{,}58824$
		$x_9 = 1{,}9,$	$y_9 = 0{,}52632$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{4} y_{2i} = 5{,}45636 \qquad 4 \cdot \sum_{i=0}^{4} y_{2i+1} = 13{,}83820$$

$x_0 = 1{,}0,$ $\quad y_0 = 1{,}00000$

$x_{10} = 2{,}0,$ $\quad y_{10} = 0{,}50000$

$$y_0 + y_{10} = 1{,}50000$$

$$S = \frac{1}{3 \cdot 10}(1{,}50000 + 5{,}45636 + 13{,}83820) = 0{,}693152$$

Tehát ($R_{10} < 0$ miatt és $\pm 0{,}000005$ táblahibával):

$$0{,}693152 - 0{,}000005 - 0{,}000014 = 0{,}6931|33 < \ln 2 < 0{,}693152 + 0{,}000005 =$$
$$= 0{,}6931|57.$$

Tehát írhatjuk:

$$\ln 2 = 0{,}69314 \pm 0{,}00002.$$

3. Kiszámítandó a $\Phi(1) = \int_0^1 e^{-x}\, dx$ integrál, 0,0001 pontossággal, a *Simpson*-szabály segítségével!

Az $y(x) = e^{-x}$ függvény 4. deriváltjának abszolút értéke a $0 \leq x \leq 1$ közön 12 alatt marad. (Ellenőrizzük!) Tehát $2n = 10$-zel próbálkozva:

$$R_{2n} \leq \frac{1}{180\,(2n)^4} \cdot 12 < 0{,}7 \cdot 10^{-5}$$

$x_2 = 0{,}2,\quad y_2 = 0{,}96079$
$x_4 = 0{,}4,\quad y_5 = 0{,}85214$
$x = 0{,}6,\quad y_6 = 0{,}69768$
$x_8 = 0{,}8,\quad y_8 = 0{,}52729$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{4} y_{2i} = 6{,}07580$$

$x_0 = 0{,}0,\quad y_0 = 1{,}00000$
$x_{10} = 1{,}0,\quad y_{10} = 0{,}36788$

$$y_0 + y_{10} = 1{,}36788$$

$x_1 = 0{,}1,\quad y_1 = 0{,}99005$
$x_3 = 0{,}3,\quad y_8 = 0{,}91393$
$x_5 = 0{,}5,\quad y_5 = 0{,}77680$
$x_7 = 0{,}7,\quad y_7 = 0{,}61263$
$x_9 = 0{,}9,\quad y_9 = 0{,}44486$

$$4 \cdot \sum_{i=0}^{4} y_{2i+1} = 14{,}96108$$

$$S = \frac{1}{3 \cdot 10}(1{,}36788 + 6{,}07580 + 14{,}96108) = 0{,}746825.$$

Mivel az $y^{(4)}(x)$ előjelét nem ismerjük, a $\pm 0{,}000005$ táblázati hiba mellett a *Simpson*-módszer itteni $0{,}7 \cdot 10^{-5} = 0{,}000007$ hibáját is vesszük; tehát:

$$0{,}746825 - 0{,}000012 = 0{,}746813 < \Phi(1) <$$
$$< 0{,}746825 + 0{,}000012 = 0{,}746837,$$

azaz:

$$\Phi(1) = 0{,}7468 \pm 0{,}00004.$$

4. Számítsuk ki a $G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx$ integrált (E. *Catalan* állandója) a *Simpson*-szabállyal, $2n = 10$ választással!

Az $y(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$ függvény táblázata:

$y_0 = 1,\quad y_{10} = 0{,}78540$

$y_1 = 0{,}99668,\quad y_2 = 0{,}98698$
$y_3 = 0{,}97152,\quad y_4 = 0{,}95127$
$y_5 = 0{,}92730,\quad y_6 = 0{,}90070$
$y_7 = 0{,}87246,\quad y_8 = 0{,}84343$
$y_9 = 0{,}81424,$

$$y_0 + y_{10} = 1{,}78540$$
$$2 \cdot \sum_{i=1}^{4} y_{2i} = 7{,}36476$$
$$4 \cdot \sum_{i=0}^{4} y_{2i+1} = 18{,}32880$$

$$S = \frac{1}{30}(1{,}78540 + 7{,}36476 + 18{,}32880) = 0{,}915965.$$

5. Egy folyó szélessége 20 m; egy bizonyos keresztmetszetben a 2 méterenként végzett mélységmérések a következő táblázatot szolgáltatták:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0,2	0,5	0,9	1,1	1,3	1,7	2,1	1,5	1,1	0,6	0,2

Az egyik parttól való távolságot (méterekben) x-szel jelöltük, a folyó megfelelő mélységét (ugyancsak méterekben) y-nal. Meg kell határoznunk a folyó keresztmetszetének területét. Oldjuk meg a feladatot a *trapéz-* és a *Simpson*-szabállyal!

A trapéz-szabállyal:

$$T = 2\left[\frac{0,2 + 0,2}{2} + 0,5 + 0,9 + 1,1 + 1,3 + 1,7 + 2,1 + 1,5 + 1,1 + 0,6\right] = 22\ \mathrm{m};$$

Simpson formulájával:

$$T = \frac{2}{3}\,[22 + 2 \cdot (0,5 + 1,1 + 1,7 + 1,5 + 0,6)] = 21,9\ \mathrm{m}^2.$$

6. Határozzuk meg a *Simpson*-szabállyal ln 5 közelítő értékét az intervallum 4 részre osztásával.

7. $\int\limits_0^1 (x^3 + 1)\,dx = ?$ Most 8 egyenlő részre osztva az intervallumot, kiszámítandó az integrál téglany-, érintő-, és *Simpson*-szabállyal és határozott integrállal! (Miért nem ad hibát a *Simpson*-szabállyal való számolás jelen esetben?)

Számítsuk ki trapéz-, ill. Simpson-szabállyal a következő integrálokat:

8. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 + x^3}}$, az intervallumot 4 részre osztva.

9. $\int\limits_0^2 \sqrt{1 + x^3}\,dx$, az intervallumot 4 részre osztva.

10. $\int\limits_1^5 \sqrt{126 - x^3}\,dx$, az intervallumot 4 részre osztva.

11. $\int\limits_2^8 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{4 + x^2}}$, az intervallumot 6 részre osztva.

12. $\int\limits_0^{10} \sqrt[3]{125 - x^2}\,dx$. az intervallumot 5 részre osztva.

(A 12. feladatot csak a trapéz-szabállyal oldjuk meg, mivel a *Simpson*-szabály csak páros n esetén alkalmazható!)

Számítsuk ki a következő integrálokat a Simpson-szabállyal. Ezeknél a primitív függvény zárt alakban nem adható meg.

13. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx,$ az intervallumot $2n = 10$ részre osztva.

14. $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx,$ $2n = 10$ beosztással.

15. $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x},$ $(2n = 6)$.

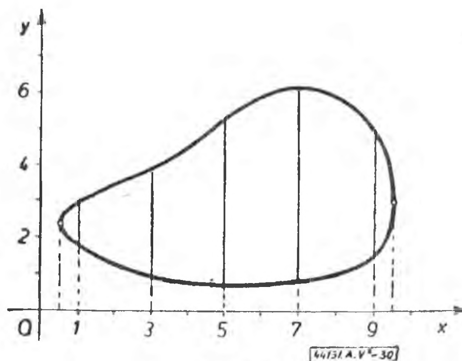
16. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi.$ $(2n = 10)$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}\,dx,$ $(2n = 10)$ (Itt baloldali ordinátának vegyük a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket.)

18. Számítsuk ki a *Simpson*-formulával $\int_{1,05}^{1,35} f(x)\,dx$ értékét, ha $f(x)$ a következő táblázattal van megadva:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

19. Adva van egy zárt görbe (l. a 30. ábrát) a következő koordinátájú pontokkal:



30. ábra

x	0,5	1	3	5	7	9	9,5
y	2,4	1,8 3,0	0,9 3,9	0,7 5,3	0,8 6,1	1,5 5	3

Számítsuk ki a területét a *Simpson*-szabállyal! (Lásd hátul!)

*20 Határozzuk meg az $E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\, dx$ 2. *fajú elliptikus integrál*

értékét a *Simpson*-szabállyal, 0,001 pontossággal.

$$y(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad a \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ közön;}$$

ugyanott $|y^{(4)}(x)| < 12$. A hiba abszolút értéke tehát:

$$|R_{2n}| < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180\,(2n)^4} \cdot 12 < \frac{2}{3}\,\frac{1}{(2n)^4}, \quad \text{mert} \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 < 10.$$

A $2n = 6$-tal próbálkozva, $|R_6| < 0{,}00052$ lévén, megfelelő pontossághoz jutunk.

$x_0 = 0 \quad (0°) \qquad y_0 = 1{,}0000$

$x_1 = \frac{\pi}{12}\ (15°); \quad 4y_1 = \sqrt{12 + \sqrt{12}} = 3{,}9324$

$x_2 = \frac{\pi}{6}\ (30°); \quad 2y_2 = \sqrt{14}/2 = 1{,}8708$

$x_3 = \frac{\pi}{4}\ (45°); \quad 4y_3 = \sqrt{12} = 3{,}4641$

$x_4 = \frac{\pi}{3}\ (60°); \quad 2y_4 = \sqrt{10}/2 = 1{,}5811$

$x_5 = \frac{5\pi}{12}\ (75°) \quad 4y_5 = \sqrt{12 - \sqrt{12}} = 2{,}9216$

$x_6 = \frac{\pi}{2}\ (90°); \quad y_6 = \sqrt{2}/2 = 0{,}7071$

$$\sum y_i = 15{,}4771$$

$$S = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{12}}{6} \cdot 15{,}4771 =$$

$$= 1{,}35063 \pm (0{,}00052 + 0{,}00003) =$$

$$= 1{,}35063 \pm 0{,}00055,$$

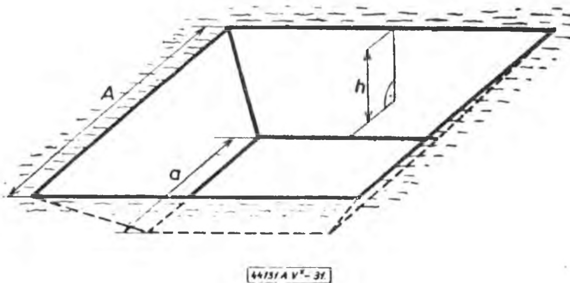
azaz:

$$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1{,}351 \pm 0{,}001.$$

Műszaki alkalmazások

1. NÉGYZETALAPÚ MUNKAGÖDÖR KÖBTARTALMÁNAK SZÁMÍTÁSA A SIMPSON-SZABÁLLYAL*

A 31. ábrán látható négyzetalapú munkagödör (fordított csonkagúla) köbtartalmát a gödör alaplapjának T_1 és fedőlapjának T_2 területe, valamint h magassága egyértelműen meghatározza. A köbtartalmat jelen feladatnál az úgynevezett *területszelvény-ábra* segítségével állapítjuk meg (32. ábra). Az alap- és fedőlapnak megfelelő ordináták T_1 és T_2,



31. ábra

* L. *Kézdi:* Földművek

a magasságnak megfelelő abszcissza h. Kérdés, *hogyan kell a* területszelvény-ábrán *a* T_1 *és* T_2 *pontokat összekötni.*

Mivel bármely közbenső területszelvény két hossznak a szorzata, és e hosszak mindegyike lineárisan változik, ezért *a terület kvadratikusan változik.* A középső $\frac{h}{2}$ abszcisszához tartozó ordináta tehát az ábrából kiolvashatóan: $\left(\frac{a+A}{2}\right)^2$. A kapott *parabola alatti terület* nagysága adja a köbtartalom mérőszámát. A görbe alatti területet *Simpson*-szabállyal állapítjuk meg:

32. ábra

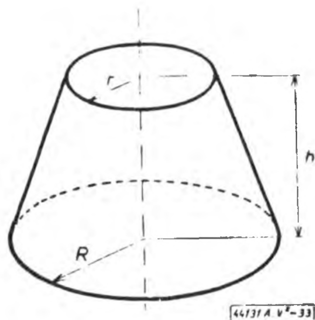
$$K = \frac{h}{6}\,[T_1 + 4T_0 + T_2] =$$

$$= \frac{h}{6}\left[A^2 + 4\left(\frac{a+A}{2}\right)^2 + a^2\right] = \frac{h}{3}(A^2 + aA + a^2).$$

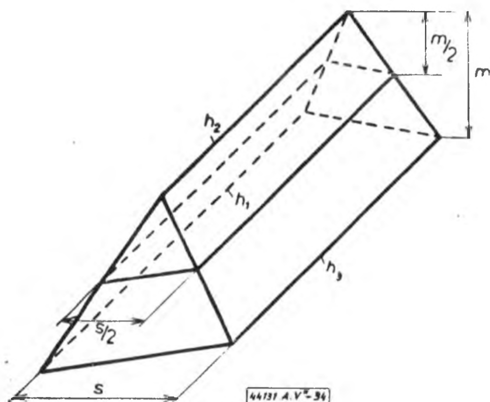
2. Határozzuk meg a 33. ábrán látható csonka körkúp köbtartalmát a *Simpson*-szabállyal.

3. KAVICSPRIZMA KÖBTARTALMÁNAK MEGHATÁROZÁSA A SIMPSON-SZABÁLLYAL*

A 34. ábrán látható kavicsprizmán (amely útfenntartási anyagnak az út padkáján való tárolására szolgál) — az 1. példa megoldásának megfelelően — három egymással párhuzamos és egymástól egyenlő távolságban fekvő síkmetszetet veszünk fel.



33. ábra



34. ábra

Célszerűen az *alap* lesz az első, a (zérus területű) *felső él* a harmadik, a második pedig a fél-magasságban adódó síkmetszet. Alkalmazva a *Simpson*-szabályt a 3 területszelvényre, a *prizma köbtartalma* így alakul:

$$K = \frac{m}{6}\left(\frac{h_1 + h_3}{2}\,s + 4\,\frac{\frac{h_1 + h_2}{2} + \frac{h_2 + h_3}{2}}{2}\,\frac{s}{2} + 0\right),$$

* L. *Kézdi*: Földművek

összevonások után pedig:

$$K = \frac{ms}{6}(h_1 + h_2 + h_3).$$

Figyelembe véve, hogy

$$\frac{ms}{2} = T,$$

a következő végeredményhez jutunk:

$$K = T\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}.$$

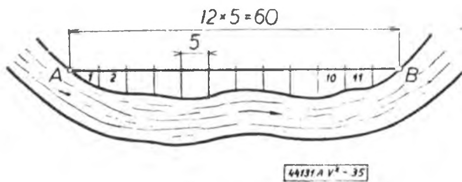
KÜLÖNFÉLE MŰSZAKI TERÜLET-SZÁMÍTÁSI FELADATOK (4–8. pld.)

4. A 35. ábrán látható *folyó és az AB egyenes kerítés közötti terület* meghatározása céljából húzzunk az AB egyenesre 5,0 m-ként merőlegeseket a partig. Az így nyert összesen 11 egyenesdarab hossza rendre:

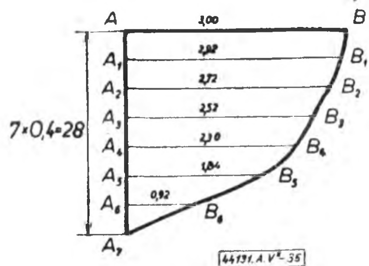
3,28; 4,02; 4,64; 5,26; 4,98; 3,62; 3,82; 4,68; 5,26; 3,82; 3,24 m.

Mekkora a keresett terület?

5. Kiszámítandó a 36. ábrán látható *hajófőmetszetnek* (azaz a hajó legszélesebb helyén vett keresztmetszetnek) területe a következő adatok alapján:



35. ábra



36. ábra

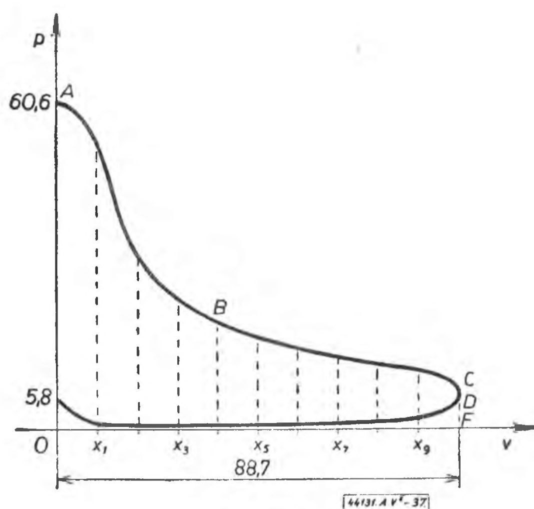
$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = 0{,}4 \text{ m}; \; AB = 3{,}0 \text{ m}.$$

$A_1B_1 = 2{,}92$ m; $A_2B_2 = 2{,}75$ m; $A_3B_3 = 2{,}52$ m; $A_4B_4 = 2{,}3$ m; $A_5B_5 = 1{,}84$ m; $A_6B_6 = 0{,}92$ m.

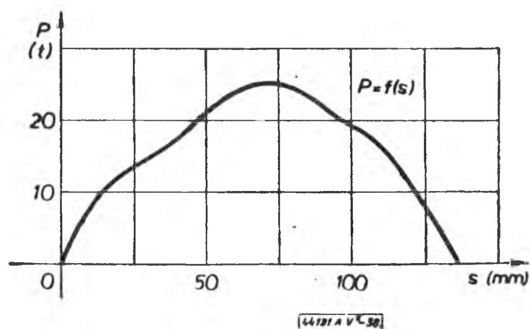
6. A 37. ábrán egy *gőzgép indikátor-diagrammja* látható. Az ABC és ED görbék ordinátáinak hosszát az $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ helyeken a mellékelt táblázat adja:

Abszcissza:	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
ABC görbe ordinátája:	60,6	53,0	32,2	24,4	19,9	17,0	15,0	13,3	12,0	11,0	6,2
ED görbe ordinátája:	5,8	1,2	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,3	1,8	5,7

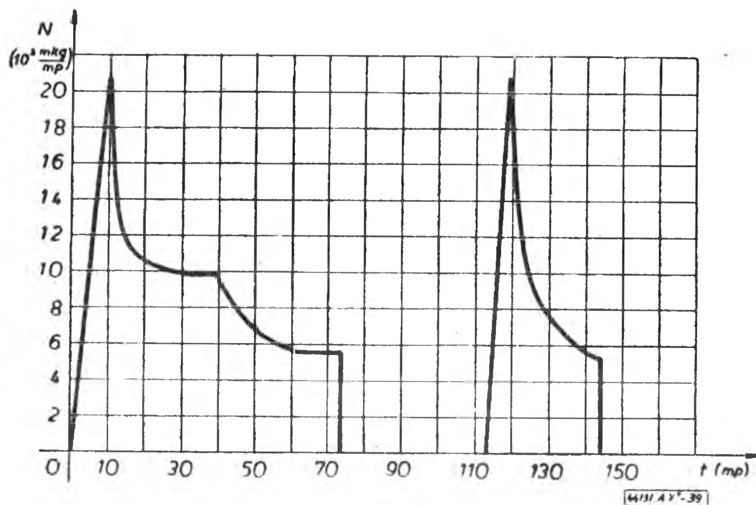
Határozzuk meg *Simpson*-szabállyal az $ABCDE$ görbe által meghatározott területet. Az ordináták hossza mm-ben van megadva. Az OF távolság hossza 88,7 mm.



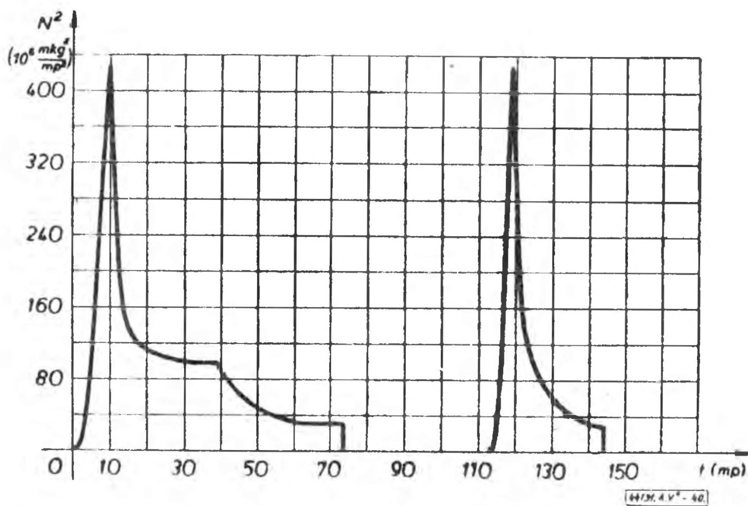
37. ábra



38. ábra



39. ábra



40. ábra

7. A sajtoló szakmában előfordul, hogy különböző *sajtoló szerszámokat kell összehasonlítani* (azonos méretű munkadaraboknál) *munkaszükséglet szempontjából*. E célból megfelelő regisztráló műszerek segítségével elkészítik az összehasonlítandó szerszámok sajtolási *erő-út görbéjét* $[P = f(s)]$, majd a *Simpson*-szabály segítségével kiszámítják a görbe alatti síkrész területét [tmm-ben]. Nyilván az a szerszám a *leggazdaságosabb*, amelynél e görbe alatti terület s így a munkaszükséglet a legkisebb.

Határozzuk meg az említett módon a 38. ábrán látható sajtolási görbe alatti területet, tmm-ben.*

8. Határozzuk meg a *villamos vasút*-feladatban szereplő $N = N(t)$ *teljesítmény-idő görbe*, valamint az $N_2 = N^2(t)$ *teljesítménynégyzet-idő görbe* alatti területet, numerikus integrálással, a léptékek figyelembevételével. (E görbék a 39. és 40. ábrán láthatók.)

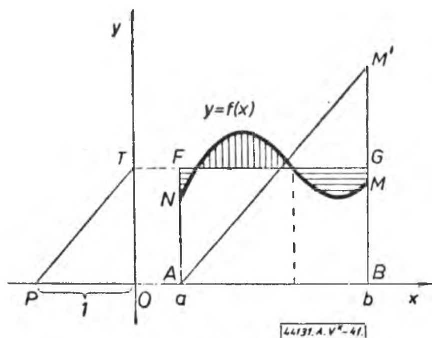
g) Grafikus integrálás**

α) Bevezetés Adva az $y = f(x)$ függvény görbéje. *Feladatunk: geometriai úton meghatározni az*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

határozott integrál értékét (geometriailag a görbe alatti terület $[a, b]$ szakaszmenti darabjának mérőszámát), anélkül, hogy valami számolást végeznénk.

β) Elvi ismertetés Az egyszerűség kedvéért az x és y tengelyen egyelőre egyforma egységeket vegyünk fel. A $P(-1, 0)$ pont az alábbi szerkesztés során *pólus*ként fog szerepelni. Most húzzuk meg azon $y = c$ állandó függvény görbéjét, amely görbe alatti terület az $[a, b]$ szakaszon szemmelláthatóan *kevéssé tér el* az $y = f(x)$ függvény görbéje alatti, ugyanazon szakaszmenti területtől. A P pólust összekötjük e vízszintes egyenes és az y tegely T metszéspontjával, majd ezzel párhuzamosat húzunk az A $(a, 0)$ pontból kiindulva, az $[a, b]$ szakaszon. Az $f(b)$ ordinátából (vagy meghosszabbításából) e párhuzamos által *lemetszett* $M'B = F(b)$ *egyenesdarab hosszúsági mérőszáma megegyezik* (a most leírt szerkesztés pontosságának megfelelő közelítéssel) *az* $y = f(x)$ *görbéje alatti*, említett *síkrész területi mérőszámával* (41. ábra).



41. ábra

U. i. a POT és ABM' háromszögek hasonlósága alapján írhatjuk:

$$\frac{BM'}{AB} = \frac{OT}{OP}, \quad \text{ahonnan} \quad BM' = \frac{AB \cdot OT}{OP} = AB \cdot OT,$$

vagy más jelölésekkel:

$$F(b) = \frac{(b-a)\,c}{1} = (b-a)\,c.$$

Tehát a $BM' = F(b)$ ordináta hosszúsági mérőszáma valóban megegyezik az említett görbe alatti területtől kevéssé eltérő vízszintes egyenes alatti terület mérőszámával.

* *Barsi István* főmérnök gyűjtése

** L. *Bermant* i. m. I. k.

Megjegyzendő, hogy az adott szakaszon a görbe alatti terület átalakítása vízszintes egyenes alatti területté, *az integrálszámítás középértéktétele szellemében* történik:

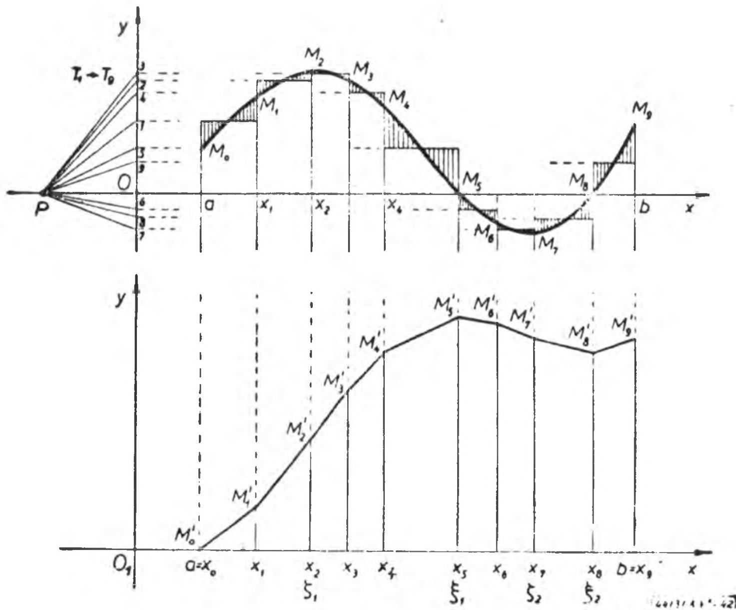
$$T_g = \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a) = T,$$

[a szakaszon folytonos $f(x)$ esetén], ahol $a \leq \xi \leq b$. A fentebbiekben említett $y = c$ *vízszintes egyenes meghúzásakor éppen ezen* $f(\xi)$ *középordinátát törekszünk szemmértékkel megállapítani.*

γ) Gyakorlati eljárás

Ha az $[a, b]$ szakasz — mint a gyakorlatban legtöbbször — nem elég kicsiny, akkor a most említett vízszintes egyenes szemmértékkel való meghúzása számottevő hibára vezethet. Ilyenkor a pontosság javítása céljából *az adott szakaszt* (nem feltétlenül egyenlő) *részszakaszokra osztjuk*; *célszerűen* úgy, hogy az egyes részszakaszokon az $f(x)$ görbéje monoton legyen, továbbá, hogy az $f(x)$ esetleges ξ_i előjelváltó zérushelyei és ζ_l szélsőértékhelyei [ahol tehát $f(\xi_i) = 0$ és $f'(\zeta_j) = 0$, de $f'(\xi_j) \neq 0$ és $f''(\zeta_l) \neq 0$] szerepeljenek az x_k osztópontok között. Ilyen beosztás készítése különösen indokolt akkor, ha az $f(x)$ görbe $F(x) = F(a) + \int_a^x f(x)\,dx$ *integrálgörbéjének* (közelítő) *megszerkesztésére* törekszünk; ekkor u. i. a ξ_i, illetve ζ_j helyek ezen integrálgörbe extremum-, illetve inflexiós helyei. Ha a beosztásnak megfelelő görbedarabok nem térnek el jelentősen az egyenestől, akkor az

$$f(\eta_k) = \frac{1}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$$



42. ábra

középordináták szemmértékkel való megállapítása helyett egyszerűen a részszakaszok

$$\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)$$

középső ordinátájával rajzoljuk meg részszakaszonként a vízszintes egyenesdarabokat. Ezek vetületi pontjait az y tengelyen jelöljük T_k-val.

Ezekután — a β)-ban leírt módon — *részszakaszonként megszerkesztjük a PT_k* segédvonalakkal párhuzamos $M'_{k-1} M'_k$ *egyenesdarabokat*, mégpedig célszerűen egy, az $f(x)$ görbe koordinátarendszere alatti (feletti) másik koordinátarendszerben (42. ábra). Ezen $M'_{k-1} M'_k$ egyenesdarabokat *egymáshoz fűzve* rajzoljuk meg, s ezzel összhangban *az x_k helyeken adódó eredő $F(x_k)$ ordináták (előjeles) hosszúsági mérőszáma közelítőleg az x_k helyektől balra ($x_0 = a$-ig) elhelyezkedő részterületek (előjeles) területi mérőszámainak (algebrai) összegével egyenlő.* Ennek megfelelően az $F(b)$ ordináta az $f(x)$ görbéje alatti s $[a, b]$ szakaszmenti területről tájékoztat.

Az ilyen szerkesztés útján nyert poligon-görbe az $f(x)$ görbe $F(x) = F(a) + \int_a^x f(x)\,dx$ integrálgörbéjének közelítő alakja. Éppen ezért a fentebb leírt szerkesztést *grafikus integrálás*nak nevezzük.

δ) **Megjegyzések** A grafikus integrálást *rendszerint* akkor alkalmazzuk, amikor *az integrálandó $f(x)$ függvény csak görbéjével van adva*, míg képlete nem ismeretes. Ez sűrűn előfordul a gyakorlatban, pl. a különféle regisztráló készülékek által felrajzolt grafikonok esetében.

Fentebb már tettünk említést az előjeles területi mérőszámról. Így pl. amely részszakaszon az $f(x) < 0$, azaz görbéje az x tengely alatt halad, ott — az $F'(x) = f(x)$ körülménynek megfelelően — az $F(x)$ görbéje monoton süllyed. Ugyancsak céloztunk már *az $F(x)$ görbe ξ_i szélsőérték-helyeire és ζ_j inflexiós helyeire* (42. ábra).

Megjegyzendő, hogy a gyakorlatban a grafikus integrálásnál a legritkábban van dolgunk az x és y tengelyen egyforma egységekkel. Az egységeket ugyanis a változók szélsőértékeinek, valamint a rendelkezésre álló rajzterület méreteinek mérlegelése alapján választjuk meg. Ily módon fontos szerepet játszanak az egyes változókra vonatkozó *lépték- v. mértékszámok*; ezek megmutatják, hogy a rajzban az illető változóra vonatkozó hosszegységnek (mm) a valóságban hány technikai egység (pl. km/óra) felel meg. Ezek tekintetében a példákra hivatkozunk.

A gépi integrálás ismertetését itt mellőzzük; ehelyett az irodalomra* és sorozatunk *B*. VIII. kötetére utalunk.

VILLAMOS VASÚTI SZERELVÉNY MENETDIAGRAMMJA

(Az alábbi összeállítás a IV. éves erősáramú villamosmérnökhallgatók vasút-feladatát ismerteti kivonatosan**, konkrét számadatok mellett,*** mint igen szép példát a grafikus integrálás gyakorlati felhasználására.)

* L. pl. *Bermant* i. m. I. kötet, 363. és köv. o. — *Б. Н. Делоне: Краткий курс математических машин, Гостехиздат, 1952, Москва.*
** L. részletesen *Verebély—Csáki* idézett jegyzetében.
*** T. E. IV. villmh. számításai alapján.

α) **Irányelvek**
A feladat kitűzése
Adatok

α₁) Irányelvek. Adott összeállítású és súlyú **közúti szerelvény** a (mellékelt tábla 0. ábráján) **feltüntetett mértékadó** hosszszelvényű **pályán** halad.

A síkpályán megengedhető a_m *gyorsulást* az ú. n. ***tapadás*** határozza meg ($a_m < a_{t\max}$), de a_m nem lehet nagyobb, mint a megadott maximális $a_{\max}$. Ha ez utóbbi nagyobb, mint a tapadásból számítható $a_{t\max}$, akkor a kihasználható vonóerő $K_{\max}$ nagyságát $a_m < a_{t\max}$ gyorsulás határozza meg (a csúszás megakadályozása érdekében), valamint az a követelmény, hogy a vonat az előforduló legmeredekebb emelkedőn $K \approx 0{,}75$ $K_{\max}$ *vonóerő* alkalmazása esetén legalább egyenletes sebességgel tudjon áthaladni. Az így megállapított $K_{\max}$ és előírt $v_{\max}$ érték felhasználásával — a mellékelt százalékos tapasztalati táblázat alapján — megrajzolható a $K = K(v)$ vonóerő-sebesség görbe (l. a tábla 1. görbéjét).

A *fékezés* legfeljebb a tapadásból számítható $b_{t\max}$ lassulás 60%-ával történik, de kell, hogy e $b_m \leq b_{\max}$ legyen. Minden kocsi legyen fékezett.

A tengelytáv kéttengelyes kocsiknál 4 m-nek, forgózsámolyos kocsinál 1,7 m-nek vehető.

α₂) A feladat kitűzése. Ezen irányelvek alapján megoldandó a következő feladat:

a) Megállapítandó *menetdiagramm* szerkesztése útján a T menetidő és a v_u utazási sebesség, 20 mp-es megállás figyelembevételével.

b) Ellenőrzendő a szerkesztés helyessége a gyorsulás-lassulás (a_*) menetidőbeli integráljára vonatkozó

$$\int_0^t a_*\,dt = \int_0^{t_1} a\,dt - \int_0^{t_2} b\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} a\,dt - \sum_{j=1}^{m}\int_{t_j}^{t_{j+1}} b\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{v_i}^{v_{i+1}} dv - \sum_{j=1}^{m}\int_{v_j}^{v_{j+1}} dv =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(v_{i+1} - v_i) - \sum_{j=1}^{m}(v_{j+1} - v_j) = \sum_{i=1}^{n}\Delta v_i - \sum_{j=1}^{m}\Delta v_j = 2v_{\max} - 2v_{\max} = 0$$

(feltéve, hogy mindkét alkalommal $v_{\max}$-ra gyorsítjuk fel a szerelvényt) követelmény **alapján** (ahol $a > 0$ a gyorsulás, $-b < 0$ a lassulás, t_1 a gyorsuló, t_2 a lassuló menet összideje, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ a gyorsuló, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ a lassuló menet egy-egy ugrásnélküli **időszaka**, Δv_i és Δv_j ezen időszakokban a sebességnövekmény abszolút értéke); továbbá a **gyorsító** és lassító erők (P_*) pályamenti integráljára vonatkozó (s az előbbi módon részletesen **kifejthető**)

$$\int_0^s P_*\,ds = m_ö\int_0^{s_1} a\,ds - m_\delta\int_0^{s_2} b\,ds = m_\delta\int_0^{t_1}\dot{v}\,v\,dt - m_o\int_0^{t_2}\dot{v}v\,dt = 2\,m_\delta\int_0^{v_{\max}} v\,dv - 2m_\delta\int_0^{v_{\max}} v\,dv =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\,m_\delta\,v_{\max}^2 - \frac{1}{2}\,m_\delta\,v_{\max}^2\right] = 0\,.$$

(ismét feltéve, hogy mindkét alkalommal $v_{\max}$-ra gyorsítjuk fel a szerelvényt) **követelmény** alapján (ahol most s_1 a gyorsuló, s_2 a lassuló menet összsúlya).

c) Megrajzolandó grafikus szorzás útján az $N = N(t)$ *teljesítmény-idő görbe*, annak figyelembevételével, hogy az indítás állandó teljesítménnyel történik. A gépi berendezés átlagos hatásfoka legyen $\eta = 85\%$.

d) Az $N = N(t)$ teljesítmény-idő görbéje alatti terület alapján meghatározandó a ***fajlagos** fogyasztás Wó/tkm*-ben.

e) Megállapítandó a teljesítmény $N_n = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T N^2\,dt}$ kvadratikus középértéke gyanánt a *szükséges gépteljesítmény*, továbbá az ehhez tartozó sebesség, végül ez utóbbiból a motor(ok) n_n *névleges fordulatszáma*, $á = 17 : 82$ áttétel, $D_k = 800$ mm kerékátmérő és $\eta_a = 95\%$ hajtómű-hatásfok mellett.

α_3) *Adatok.*

a) A vasúti szerelvény egy $G_{gk} = 20$ t súlyú, forgózsámolyos mozdonyból és $n = 2$ db. egyenként, utasokkal együtt $G_k = 17$ t súlyú kocsiból áll.

b) A megengedett legnagyobb sebesség: $v_{max} = 38$ km/ó.

c) A megengedett gyorsulás:

$$a_m \leq a_{max} = 0{,}7 \text{ m/mp}^2 \text{ és } a_m < a_{tmax}.$$

d) A megengedett lassulás:

$$b_m \leq b_{max} = 0{,}8 \text{ m/mp}^2 \text{ és } b_m < b_{tmax}.$$

e) A pálya legmeredekebb *a* szakaszán az emelkedés: $i_{max} = 24^0/_{00}$ (promill).

f) Kanyarulati sugár a *c* szakaszon: $R = 70$ m.

g) Százalékos tapasztalati táblázat a vonóerő-sebesség görbe megszerkesztéséhez:

$u = \frac{v}{v_{max}} 100$	45	50	60	70	80	90	100
$k = \frac{K}{K_{max}} 100$	100	63	35	23	16	11	7

β) Menet- és pályaellenállások

β_1) *Menetellenállások.* *a) Csapsúrlódási ellenállás:*

A mozdonyon: $E_{csgk} = \varepsilon_{csgk} G_{gk} = 1{,}2 \cdot 20 = 24$ kg

A kocsikon: $E_{csk} = n\,\varepsilon_{csk} G_k' = 2 \cdot 1{,}14 = 34$ kg

Összesen: $E_{cs} = E_{csgk} + E_{csk} = 58$ kg.

Itt G_{gk} és G_k t-ban értendő; ε_{csgk} és ε_{csk} tapasztalati állandók.

b) Gördülési ellenállás:

Az egész szerelvényre: $E_g = \mu_g G_ö = 4 \cdot 54 = 216$ kg, ahol μ_g tapasztalati állandó és $G_ö = G_{gk} + nG_k$.

c) Sínillesztések ellenállása:

Az egész szerelvényre tapasztalati képlet szerint:

$$E_s = 0{,}0142\, G_ö \left(\frac{v}{10}\right)^2 \text{ kg},$$

ahol v km/ó-ban értendő. A képlet alkalmazásával: $E_s(0) = 0$ kg, $E_s(v_{max}) = 11{,}1$ kg, $E_s(0{,}45v_{max}) = 2{,}24$ kg, ahol $v_{max} = 38$ km/ó, $0{,}45v_{max} = 17{,}1$ km/ó.

d) Légellenállás:

Mértékadó felületek: $F_{gk} = 7$ m², $F_{k_1} = 2$ m², $F_{k_2} = 0{,}4$ m², összesen: $F = 9{,}4$ m². Ezzel a légellenállás szerelvényünkre *Frank* képlete szerint:

$$E_l = 0{,}54\, F \left(\frac{v}{10}\right)^2 \text{ kg}.$$

E képlettel számolva: $E_l(0) = 0$, $E_l(0{,}45v_{max}) = 14{,}8$ kg, $E_l(v_{max}) = 73{,}2$ kg.

Az összes menetellenállások figyelembevételével rajzoljuk meg az $E = E(v)$ *ellenállás-sebesség görbét* a következő 3 pontja alapján:

v	0	17,1	38	km/ó
E	274	291	358	kg

(L. a tábla 2. görbéjét !)*

β_2) *Pályaellenállások.*

a) Pályaemelkedési ellenállás: $E_i = i\,G_ö = 54i$, ahol i az emelkedés $^0/_{00}$-ben.
Az a szakaszon $i_a = 24$, tehát $E_{ia} = 1296$ kg,
az f szakaszon $i_f = -5$, tehát $E_{if} = -270$ kg,
a g szakaszon $i_g = 9{,}5$, tehát $E_{ig} = 513$ kg.

b) Kanyarulati ellenállás: a c szakaszon, ha a kanyarulati sugár $R = 70$ m, a tengelytáv $t = 1{,}7$ m, tapasztalati képlet szerint:

$$E_k = 200\frac{t}{R}G_ö = 200\frac{1{,}7}{70}54 = 262 \text{ kg.**}$$

γ) Tapadó, vonó- és fékező erő

γ_1) *Tapadó erő.* Így nevezik a mozdony meghajtott kerekei és a sín között működő erőt. Feltételezve, hogy a mozdony minden kerékpárja meghajtott (nincs futókerékpárja), a *tapadó erő* esetünkben:

$$K_t = 1000\,\mu_t\,G_{gk} = 250 \cdot 20 = 5000 \text{ kg},$$

ahol a sebességtől függő $1000\,\mu_t$ tényezőnek gyakorlati átlagértékét vettük.

A vonóerő — a csúszás elkerülése érdekében — a tapadó erőnél nagyobb nem lehet, $K \leq K_t$. *Határesetben* a $K = K_t$ vonóerő a szerelvény — gyakorlati képlet szerint —

$$m_ö = 102\,(\alpha_{gk}\,G_{gk} + n\alpha_k\,G_k) = 102\,(1{,}1 \cdot 20 + 2 \cdot 1{,}06 \cdot 17) = 5800\ \frac{\text{kg mp}^2}{\text{m}}$$

nagyságú (s a kerékkarimára vonatkoztatott) *tehetetlen tömegét* sík pályán az átlagos ($0{,}45v_{max}$-nál fellépő)

$$E = E_{cs} + E_g + E_s + E_l = 58 + 216 + 2{,}24 + 14{,}8 = 291 \text{ kg}$$

menetellenállással szemben nyilván

$$a_{t\max} = \frac{K_t - E_{\max}}{m_ö} = \frac{5000 - 291}{5800} = 0{,}81 \text{ m/mp}^2$$

*maximális gyorsulás*sal mozgatná.

Minthogy $a_{max} = 0{,}7$ m/mp², azaz $a_{max} < a_{t\max}$, azért *megengedett gyorsulásnak az $a_m = a_{max}$-ot tekintjük* s ezt használjuk fel alább a K_{max} vonóerő megállapítására.

γ_2) *Vonóerő.* A most meghatározott $a_m = a_{max} = 0{,}7$ m/mp² megengedett gyorsulás mellett, a szerelvény kiszámított $m_ö = 5800$ kg mp²/m tömege (a kerékkarimán)

$$T = m_ö\,a_{max} = 5800 \cdot 0{,}7 = 4060 \text{ kg}$$

tehetetlenségi erőt képvisel. Ezt, valamint az átlagos *E menetellenállás*t kell fedeznie a K_{max} *vonóerő*nek; tehát:

$$K_{max} = T + E = 4060 + 291 = 4351 \text{ kg} < K_t.$$

A legmeredekebb a emelkedőn a pályaellenállás: $E_{pa} = 1296$.

* és **: Az állandó menet- és pályaellenállásokat máris ábrázolhatjuk az út függvényében (l. a tábla 12. görbéjét), a sebességtől függő ellenállásokat később !

Minthogy

$$K = 0{,}75\,K_{\max} = 3264\ \text{kg} > E_{pa} + E = 1296 + 291 = 1587\ \text{kg},$$

ilymódon *a legmeredekebb emelkedőn* a $K = 0{,}75\,K_{\max}$ vonóerővel nemcsak egyenletes, hanem jelentősen gyorsuló menetet tudunk elérni. Esetünkben erre szükség is van, mert éppen e szakaszon indul ($v = 0$ kezdősebességgel) a vonat.

A $K_{\max}$ tehát megfelel a követelményeknek. Most a $K_{\max} = 4351$ kg, a $v_{\max} = 38$ km/ó értékek, valamint az α_3)-ban *g)* alatt megadott százalékos $k = k(u)$ táblázat alapján összeállíthatjuk a kerékkarimára vonatkoztatott $K = K(v)$ *vonóerő-sebesség függvény táblázatát:*

v	17,1	19	22,8	26,6	30,4	34,2	38	km/ó
K	4350	2740	1525	1000	697	479	304	kg

A függvény görbéje a táblán 1. alatt látható.

E görbe, valamint az összes menet- és pályaellenállások ismeretében megrajzolhatjuk a pálya minden egyes szakaszára a $K_a = T = T(v)$ *gyorsítóerő-sebesség görbét.* Ez a *b, d* és *e* sík szakaszra a 3., a *c* kanyarra a 3'., az *a* emelkedőre a 4., a *g* emelkedőre az 5., végül az *f* lejtőre vonatkozólag a 6. szám alatt szemlélhető táblázatunkon. — Kiemeljük, hogy az ábrázolást μ_e [mm/kg] *erőléptékkel* és μ_v [mm/m/mp] *sebességléptékkel* végeztük; a választott számértékek esetünkben:

$$\mu_e = \frac{1}{50} \quad \text{és} \quad \mu_v = 15.$$

γ_3) *Fékező erő.* A tapadó erő 60%-ával egyenlő fékező erő, ha minden kocsi fékezett:

$$F_t = 0{,}6\,K_{tf} = 0{,}6 \cdot 250 \cdot 54 = 8100\ \text{kg},$$

azaz átlagos

$$E = 291\ \text{kg}$$

menetellenállással együttműködve,

$$b_{t\max} = \frac{F+E}{m_{ö}} = \frac{8391}{5800} = 1{,}45\ \text{m/mp}^2$$

lassulást eredményezne. Láthatóan $b_{t\max} = 1{,}45 > b_{\max} = 0{,}8\ \text{m/mp}^2$: ezért ez utóbbival számítva:

$$F_{\max} = m_{ö}\,b_{\max} - E = 5800 \cdot 0{,}8 - 291 = 4360\ \text{kg} < F_t.$$

Ezen $F_{\max}$ *fékező erőt* alkalmazzuk az első megállásnál, a *d* szakasz végén (sík pályán). A második megállónál, a *g* szakasz végén viszont, ahol az E-n kívül az E_t emelkedési ellenállás is részt vesz a fékezésben:

$$F = F_{\max} - E_t = 4360 - 513 = 3847\ \text{kg}.$$

A fékezést megelőzőleg mindkét pályaszakasz elején, x_{szk} útdarabon, a motort kikapcsolva *szabadkifutást* eszközlünk. Ezen x_{szk} a munkatétel alapján határozható meg:

$$\frac{1}{2}\,m_{ö}\,v^2 = m_{ö}\,b_{szk}\,x_{szk} + m_{ö}\,b_{\max}\,(s - x_{szk}),$$

illetve

$$x_{szk} = \frac{2b_{\max}\,s - v^2}{2(b_{\max} - b_{szk})},$$

ahol

$$b_{szk} = \frac{E + E_t}{m_{ö}}.$$

E képletek alkalmazásával a *d* szakasz elején:

$$b_{szk} = \frac{\frac{358 + 291}{2}}{5800} = \frac{324,5}{5800} = 0,056 \text{ m/mp}^2$$

és $v = 8,66$ m/mp kezdősebességgel számolva (l. a 7. görbét)

$$x_{szk} = \frac{2 \cdot 0,8 \cdot 120 - 8,66^2}{2(0,8 - 0,056)} = 78,6 \text{ m};$$

a *g* szakaszon pedig:

$$b_{szk} = \frac{\frac{358 + 291}{2} + 513}{5800} = 0,144 \text{ m/mp}^2$$

és $v = 8,9$ m/mp-cel számolva

$$x_{szk} = \frac{2 \cdot 0,8 \cdot 250 - 8,90^2}{2(0,8 - 0,144)} = 244 \text{ m}.$$

δ) A menetdiagramm szerkesztése

δ₁) A sebesség-idő görbe szerkesztése. A fentebbiek során megrajzoltuk a $T = T(v)$ *gyorsító erő-sebesség görbé*ket, a pálya minden szakaszára vonatkozólag (l. a 3., 3'., 4., 5. és 6. görbéket). E görbék a $T = m_\delta a$ összefüggés értelmében, más léptékben, az $a = a(v)$ gyorsulás-sebesség függvény görbéi is. Ebből kell most alkalmas sorrendben az $a = a(t)$ gyorsulás idő, $v = v(t)$ sebesség-idő és az $s = s(t)$ út-idő függvény görbéjét megszerkesztenünk.

E célból először is *felosztjuk* a $[0, v_{max}]$ szakaszt tetszőleges (célszerűen monoton csökkenő) részszakaszokra. E felosztás figyelembevételével (egyelőre az *a* pályaszakasznak megfelelő) $T = T(v)$ *görbére* — szemmértékkel, a területkiegyenlítés elvét alkalmazva, vagyis a Δv_i részszakaszok T_i középordinátáit közelítőleg megállapítva — *lépcsős görbét* rajzolunk. Ezzel a T gyorsító erőt s vele együtt az *a* gyorsulást állandónak vesszük az egyes Δv_i részszakaszokban; maga a v e részszakaszokon, $\int_{t_{i-1}}^{t} a_i\, dt = a_i\,(t - t_{i-1}),\ t_{i-1} \leq t \leq t_i$ értelmében, az időben lineárisan változik.

A most említett lépcsős görbe T_i ordinátáinak felhasználásával könnyen megrajzolható a Δv_i részszakaszokon állandó $\frac{1}{a_i} = \frac{m_\delta}{T_i}$ *ordinátájú lépcsős görbe.* Bár tényleges megrajzolását — mint szükségtelent — mellőzzük, mégis kiemelendő, mert e függvény v-szerinti grafikus integrálása útján jutunk a $t = t(v)$ idő-sebesség, illetve — majd a t-t tekintve független változónak — a $v = v(t)$ sebesség-idő görbéhez. E *grafikus integrálás* a

$$\frac{T_i}{m_\delta} = a_i = \frac{\Delta v_i}{\Delta t_i},$$

illetve a

$$\Delta t_i = \frac{1}{a_i}\,\Delta v_i = \frac{m_\delta}{T_i}\,\Delta v_i$$

összefüggés értelmében, a Δv_i részszakasz mentén, egységnyi v-irányú pólustávolságon $\frac{m_\delta}{T_i}$ emelkedésű, vagy ami ugyanaz, t-irányú m_δ *pólustávolságon* T_i emelkedésű sugár segítségével történik, a *g) γ)*-ban részletezett módon. (L. a 7'. magyarázó ábrán.)

Ezen elvi magyarázat után, a tényleges ábrázoláshoz figyelembe kell még venni a léptékeket! Az előzőkben már használt $\mu_e = \frac{1}{50}$ [mm/kg] erőlépték és $\mu_v = 15$ [mm/m/mp]

sebességlépték mellett most megválasztottuk az *időléptéket*: $u_t = 1{,}5$ [mm/mp]. Ezek miatt a fentebbi

$$m_ö = \frac{T_i \, \Delta t_i}{\Delta v_i}$$

összefüggés az ábrázolásban

$$m_ö \, \mu_m = \frac{T_i \, \mu_e \cdot \Delta t_i \, \mu_t}{\Delta v_i \, \mu_v}$$

alakot ölt. A kettő hányadosát véve és a számértékeket beírva, megkapjuk a *tömegléptéket*:

$$\mu_m = \frac{\mu_e \, \mu_t}{\mu_v} = \frac{1{,}5}{50 \cdot 15} = \frac{1}{500} \text{ [mm/kgmp}^2\text{/m]},$$

ezzel a tényleges, t-irányú *pólustávolság*:

$$m = m_o \, \mu_m = \frac{5800}{500} = 11{,}6 \text{ mm}.$$

E (vízszintes) pólustávolságon $T_i \, \mu_e = \frac{T_i}{50}$ mm emelkedésű sugarak segítségével végezzük a szerkesztést az egyes Δv_i szakaszokon, a párhuzamost a Δv_1 szakaszon az O_1 origóból, a többi Δv_i=n pedig az előző integrál-görbedarab végpontjából húzva. Így nyerjük a Δv részszakaszoknak megfelelő Δt_i időszakaszokat, illetve a *törött vonalú sebesség-idő görbét*. (L. a táblabeli 7. görbét!)

Hangsúlyozzuk, hogy e grafikus integrálás során minden Δv_i sebességszakaszon, illetve Δt_i időszakban a megfelelő Δs_i pályaszakaszon érvényes lépcsőzött gyorsító, illetve lassító erő-görbével kell dolgoznunk. Ennek megvalósítására a $v = v(t)$ görbével *egyidejűleg kell szerkeszteni az $s = s(t)$ görbét.* A harmadik, vagyis az $a = a(t)$ görbe szerkesztését így célszerűen utoljára eszközöljük.

δ_2) *Az út-idő görbe szerkesztése.* A $v = v(t)$ görbe megrajzolt, $v(t) = a_i \, (t - t_{i-1})$, $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ lineáris szakaszait most $v_i = \frac{v(t_i) + v(t_{i-1})}{2}$ ordinátájú vízszintes egyenesdarabokkal helyettesítjük s az így nyert *lépcsős görbe* alapján szerkesztjük meg az $s = s(t)$ görbét. (L. a 8. görbét!) A t-szerinti *grafikus integrálást* a Δt_i időszakra vonatkozólag az elvi

$$\Delta s_i = \frac{v_i}{1} \Delta t_i ,$$

illetve (a lépték miatt) az ábrázolásbeli

$$\Delta s_i \, \mu_s = \frac{v_i \, \mu_v}{u} \Delta t_i \, \mu_t$$

összefüggés értelmében, elvileg egységnyi pólustávolságon v_i emelkedésű, ténylegesen pedig

$$u = \frac{\mu_v \, \mu_t}{\mu_s} = \frac{15 \cdot 1{,}5}{0{,}2} = 112{,}5 \text{ mm}$$

pólustávolságon $v_i \, \mu_v = 15 \, v_i$ mm emelkedésű sugarak segítségével végezzük. (A $\mu_s = 0{,}2$ [mm/m] *útléptéket* már a pálya hossz-szelvényének megrajzolásakor felvettük.)

δ_3) *A gyorsulás-idő görbe szerkesztése.* A *törött vonal* görbéjű $v = v(t)$ függvény $a = a(t)$ deriváltja nyilván *lépcsős görbéjű*, a Δt_i szakaszon elvileg

$$a_i = \frac{\Delta v_i}{\Delta t_i} 1,$$

az ábrázolásban pedig (a léptékek miatt)

$$a_i \, \mu_a = \frac{\Delta v_i \, \mu_v}{\Delta t_i \, \mu_t} g$$

állandó ordinátával. A *gyorsulásléptéket* $\mu_a = 100$ [mm/m/mp²]-nek választva, a rajzban a $\frac{\Delta v_i \mu_v}{\Delta t_i \mu_t}$ iránytg-ű (meghosszabbított) egyenesdarabok a

$$g = \frac{\mu_a \mu_t}{\mu_v} = \frac{100 \cdot 1{,}5}{15} = 10 \quad [\text{mm}]$$

pólustávolságon éppen $\mu_a a_i = 100\, a_i$ mm emelkedést mutatnak. Legcélszerűbb a szerkesztést — a $\delta_1)$-gyel összhangban — a $v = v(t)$ görbe most említett egyenesdarabjaival párhuzamos sugarak segítségével végezni, az

$$\frac{a_i \mu_a}{g} = \frac{T_i \mu_e}{m} \left(= \frac{\Delta v_i \mu_v}{\Delta t_i \mu_t} \right)$$

összefüggés (ill. a megfelelő hasonló derékszögű háromszögek) alapján. (L. a tábla 9. görbéjét!)

$\delta_4)$ *Ellenőrzések. Az $a = a(t)$ görbe birtokában* elvégezhetjük az $\alpha_2) - b)$-ben említett *ellenőrzést:*

$$T_a = \int_0^{t_1} a\,dt = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta t_i = \frac{1}{\mu_a \mu_t} \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_a \Delta t_i \mu_t = \frac{1}{150\ [\text{mm}^2/\text{m/mp}]}\, 2624\ [\text{mm}^2] =$$

$$= 17{,}52\ [\text{m/mp}] \approx v_{1max} + v_{2max} = 8{,}66 + 8{,}90 = 17{,}56\ [\text{m/mp}],$$

ahol v_{1max}, illetve v_{2max} az első, illetve második menet folyamán ténylegesen elért (és a 7. görbéről leolvasott) maximális sebesség; hasonlóan:

$$T_b = \int_0^{t_2} = \sum_{j=1}^{m} b_j \Delta t_j = \frac{1}{\mu_a \mu_t} \sum_{j=1}^{m} b_j \mu_a \Delta t_j \mu_t = \frac{1}{150} \cdot 2660 = 17{,}70\ \text{m/mp} \approx 17{,}56\ \text{mp}.$$

A *szerkesztési hiba* tehát:

$$h = \frac{T_a - T_b}{\frac{T_a + T_b}{2}}\, 100 = \frac{2624 - 2660}{\frac{2624 + 2660}{2}}\, 100 = -1{,}37\%,$$

amely megengedhető nagyságú.

A $v = v(t)$ és az $s = s(t)$ *görbék birtokában* megrajzolhatjuk a pálya hossz-szelvénye mentén a gyorsító erők $T = T(s)$, valamint a lassító erők $E = E(s)$ (szabadkifutás) és $F = F(s)$ (fékezés) görbéit, — figyelembevéve, hogy ezen erők (a 2., 3., 3'., 4. és 5. görbék tanúsága szerint) a pályaszakasztól ($a, b, \ldots g$) és a (v) sebességtől egyaránt függenek.

A táblán 12. és 13. alatt a *vonóerő* ($K = T + E + E_i$), valamint a *menet- és pályaellenállások* ($E + E_i$) görbéjét rajzoltuk meg *a pálya mentén,* előjelre nézve helyesen. A két görbe szuperpozíciójaként adódik a *gyorsító és lassító erők* 14. számú görbéje.

E görbék birtokában most végezzük el az $\alpha_2) - b)$-ben említett másik *ellenőrzést:**

$$T_a = \int_0^{s_1} T\,ds = \frac{1}{\mu_e \mu_s} \int_0^{s_1} T\mu_e\, ds\, \mu_s = \frac{1}{0{,}01 \cdot 0{,}2\ [\text{mm}^2/\text{mkg}]} \cdot 934\ [\text{mm}^2] =$$

$$= 467\,000 \approx \frac{m_ö}{2}(v_{1\,max}^2 + v_{2\,max}^2) = \frac{5800}{2}(8{,}66^2 + 8{,}90^2) = 460\,000\ \text{mkg},$$

ahol a görbe alatti területet pl. 5 mm-es szakaszbeosztás mellett numerikus integrálással állapíthatjuk meg.

* Itt az erőlépték a régi fele, azaz $\mu_e = 0{,}01$.

Hasonló módon:

$$T_b = \int_0^{s_2} E_{szk}\, ds + \int_0^{s_3} F\, ds = \frac{1}{\mu_e \mu_s} \left[\int_0^{s_2} E_{szk}\, ds + \int_0^{s_3} F\, ds \right] = \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 924 = 462\,000 \approx$$

$$\approx 460\,000 \text{ mkg}.$$

A *szerkesztési hiba* tehát:

$$h = \frac{T_a - T_b}{\frac{T_a + T_b}{2}} 100 = \frac{5000}{464\,500} 100 = 1{,}08\%,$$

ami szintén elfogadható.

Az $\alpha_2) - a)$-ban feltett kérdésekre válaszolva a menetdiagramm alapján, a *teljes menetidő*, a 20 mp-es megállást is beleszámítva:

$$T = 185 \text{ mp};$$

az *utazási sebesség* tehát:

$$v_a = \frac{S}{T} = \frac{1050}{185} = 5{,}67 \text{ m/mp} = 20{,}4 \text{ km/ó}.$$

e) Egyéb kérdések

$e_1)$ *A teljesítmény-idő diagramm szerkesztése.* — Ezt (célszerűen a $v = v(t)$ és az $s = s(t)$ görbe szerkesztésével egyidejűleg) valamely t időpontbeli *sebesség és* az 1. számú $K = K(v)$ görbe szerint ehhez tartozó *vonóerő grafikus szorzása útján* végezzük; mégpedig elvileg az

$$N = Kv,$$

illetve

$$\frac{N}{K} = \frac{v}{1}$$

összefüggés szerint, az ábrázolásban pedig (a léptékek miatt) az

$$\frac{N\mu_n}{K\mu_e} = \frac{v\,\mu_v}{n}$$

összefüggés alapján és a (kettő hányadosából nyerhető)

$$n = \frac{\mu_e\,\mu_v}{\mu_n} = \frac{0{,}02 \cdot 15}{0{,}01} = 30 \text{ mm}$$

pólustávolsággal (felvéve a μ_n [mm/mkg/mp] *teljesítményléptéket*). E (vízszintes és az O_1-től balra felmért) pólustávolságon $v\,\mu_v$ mm emelkedésű sugárral párhuzamos átfogójú és a $K\,\mu_e$ mm vízszintes befogójú derékszögű háromszög függőleges befogója éppen $N\mu_n$ mm. Ha a szerkesztést lépcsőzött $K = K(v)$ görbével végezzük, törött vonalú $N = N(t)$ görbét kapunk. (L. a táblabeli 10. görbét!)

Az $N = N(t)$ görbe megrajzolásával eleget tettünk az $\alpha_2) - c)$-nek.

$e_2)$ *Energiafogyasztás.* Az $N = N(t)$ *görbe birtokában* meghatározhatjuk a fogyasztott energiát. Ezt a görbe alatti terület megállapítása után nyerjük, az eredő hatásfok, valamint a léptékek figyelembevételével, az

$$A = \frac{1000}{102 \cdot 3600\, \eta\, \mu_n\, \mu_t} \int_0^T N\,\mu_n\, dt\, \mu_t \text{ Wo}$$

értelmében.

A gépi berendezések hatásfoka: $\eta_g = 0{,}85$, a hajtóműé: $\eta_h = 0{,}95$; tehát az *eredő hatásfok:* $\eta = \eta_g \eta_h = 0{,}807$.

A $T_N = \int_0^T N\mu_n \, dt \, \mu t$ görbe alatti területet pl. 5 mm-es szakaszbeosztás mellett numerikus integrálással állapítjuk meg; eszerint:

$$T_N = 9653 + 3970 = 13\,623 \text{ mm}^2.$$

A *fogyasztott energia* tehát Wó-ban:

$$A = \frac{1000}{102 \cdot 3600 \cdot 0{,}807 \cdot 0{,}01 \cdot 1{,}5} T_N = 3060 \text{ Wó}.$$

Ezzel az ú. n. *fajlagos* (vagyis 1 tonnakilométerre vonatkoztatott) *fogyasztás:*

$$\delta = \frac{A}{S\,G_ö} = \frac{3060}{1{,}050 \cdot 54} = 54{,}0 \; \frac{\text{Wó}}{\text{tkm}}.$$

Ezzel válaszoltunk az $\alpha_2) - d)$ alatti kérdésre.

Megjegyzendő, hogy az

$$\int_0^T N \, dt = \int_0^T K v \, dt = \int_0^{s_1} K \, ds$$

összefüggés értelmében *ellenőrzésre* felhasználhatjuk a $K = K(s)$ vonóerő-út görbe alatti területet.

e_3) *Motorjellemzők.* Az elvi

$$\frac{N}{1} = \frac{N^2}{N}$$

és az ábrázolásbeli (a léptékeket figyelembe vevő)

$$\frac{N\mu_n}{n_2} = \frac{N^2 \mu_{n_2}}{N\mu_n}$$

összefüggés alapján,

$$n_2 = \frac{\mu_n^2}{\mu_{n_2}} = \frac{10^{-4}}{0{,}5 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ mm}$$

pólustávolsággal dolgozva, grafikus szorzással rajzoljuk meg az $N_2 = N^2(t)$ görbét; (a μ_{n_2}-t úgy választottuk, hogy

$$0{,}1\,\mu_n N_{max} \approx \mu_{n_2} N^2_{max}, \quad \text{azaz} \quad \mu_{n_2} = \frac{0{,}1\,\mu_n}{N_{max}} \approx \frac{0{,}001}{2000} = 0{,}5 \cdot 10^{-6}).$$

(L. a 11. görbét!)

Az $N_2 = N^2(t)$ *görbe birtokában,* numerikus integrálással állapítjuk meg a görbe alatti T_{N_2} területet; ezzel:

$$\frac{1}{T}\int_0^T N^2 \, dt = \frac{1}{\mu_{n_2} T \mu_t}\int_0^T N^2 \mu_{n_2} \, dt \, \mu_t = \frac{1}{\mu_{n_2} T \mu_t} T_{N_2} =$$

$$= \frac{7146}{0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 18{,}5 \cdot 1{,}5} = 5160.10^{5} \quad (\text{mkg/mp})^2.$$

A teljesítmény kvadratikus középérteke tehát, a hatásfok figyelembevételével:

$$N_m = \frac{1}{102\,\eta}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T N^2\,dt} = \frac{\sqrt{5160 \cdot 10^4}}{102 \cdot 0{,}807} = 87{,}3 \quad \mathrm{kW} = 119 \quad \mathrm{Le}.$$

Ez a motorok ú. n. együttes *szükséges teljesítménye.*

A motorok (a karimára vonatkoztatott) *sebességét* a

$$K = \frac{102\,N_m}{v} = \frac{8900}{v}$$

egyenletű egyenlőszárú hiperbola és a $K = K(v)$ vonóerőgörbe (mindkettőt ugyanazon léptékkel rajzolva!) metszéspontjának v_m abszcisszája szolgáltatja. Ez esetünkben:

$$v_m = 6{,}6 \quad \mathrm{m/mmp}.$$

A motorok *fordulatszáma* tehát, $D_k = 0{,}8$ m karimaátmérővel és $a = 17/82$ áttétellel számolva:

$$n_m = \frac{60\,v_m}{D\pi\,a} = \frac{60 \cdot 6{,}6 \cdot 82}{0{,}8 \cdot 3{,}14 \cdot 17} = 762 \quad \text{perc}.$$

Ezzel az α_2)-ben feltett *összes kérdésekre válaszoltunk.*

Feladat

Határozzuk meg grafikus úton az

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

integrál értékét.

2. §. AZ „ELEMEK ÖSSZEGEZÉSÉ"-NEK MÓDSZERE*

a) A probléma felvetése

Igen fontos kérdés, hogy vajjon minden egyes, a határozott integrál fogalmának alkalmazásával megoldható feladatnál (pl. görbe alatti terület, változó erő munkája, változó sebességgel megtett út stb. számításánál) *szükséges-e az integrálösszeg részletes előállítása, majd a* határozott integrálnak *határátmenet* útján való meghatározása, *vagy-pedig található-e valamely általános és rövidebb módszer*, amely közvetlenül bizonyos integrál kiszámítására egyszerűsíti a feladatot.

Nagy jelentőségű, hogy *ilyen előnyös módszer* — a függvény differenciálja fogalmának felhasználásával — *valóban rendelkezésünkre áll.*

b) A függvény differenciáljáról

Tekintettel e fogalom alábbi alkalmazására, elevenítsük fel és egészítsük ki rá vonatkozó (az A. III. kötet 10. §-ban szerzett) ismereteinket.

A függvények egy széles osztályában (ezeket később *differenciálható függvények*nek fogjuk nevezni) az *$y = f(x)$ függvénynek az $[x, x + \Delta x]$ szakaszon keletkező $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$* ***növekménye*** *mindig előállítható a*

$$\Delta y = a\,\Delta x + \alpha \;(= \Delta f)$$

módon. Itt $a = a(x)$ az adott $y = f(x)$-től, az x-től (de a Δx-től nem!) függő kifejezés; az $\alpha = \alpha(x, \Delta x)$ viszont a Δx-től is függ, továbbá $\Delta x \to 0$ (de $\Delta x \neq 0$) határátmenet esetén α a Δx-nél magasabbrendűen (gyorsabban, erősebben) $\to 0$, azaz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0\,.$$

A *Δy függvénynövekmény első, a Δx argumentum-növekménnyel arányos a Δx részét az $y = f(x)$ függvény x-helyi* ***differenciáljának*** *nevezzük* és így jelöljük:

$$dy = a\,\Delta x \quad (= df).$$

Ha $a = 0$, akkor $dy = 0$ és $\Delta x \to 0$ esetén $\Delta y \to 0$, a Δx-nél magasabbrendűen (E speciális esetet a továbbiakban figyelmen kívül hagyjuk.)

Általános esetben viszont $a \neq 0$ s így határátmenetkor:

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha}{dy} = 1 + \frac{1}{a}\,\frac{\alpha}{\Delta x} \to 1,$$

* *Bermant* i. m. I. k., 156. és köv., továbbá 376. és köv. o. alapján.

azaz $\Delta x \to 0$ (de $\Delta x \neq 0$) *esetén a Δy és a dy* egyenlőrendűen tart a 0-hoz, vagyis *a dy differenciál a Δy növekménynek főrésze, míg α elenyésző része.*

Ha az $y = f(x)$ függvénynek az x helyen van ilyen differenciálja és $\Delta x \approx 0$, de $\Delta x \neq 0$ (azaz ha Δx „igen kicsiny"), akkor az említett főrész mellett az elenyésző részt elhanyagolva:

$$\Delta y \approx a\,\Delta x = dy,$$

vagyis *a Δy függvénynövekmény kicsiben, közelítőleg úgy viselkedik, mint az $y = ax + b$ lineáris függvénynél* ($\Delta y = a\,\Delta x$ módjára) *nagyban, pontosan.* Másként: *az $y = f(x)$ függvény kicsiben közelítőleg lineárisnak vehető.*

Határozzuk meg az x helyen differenciállal rendelkező $y = f(x)$ függvény esetén e $dy = a\,\Delta x$ differenciál $a = a(x)$ tényezőjét! E célból Δx-szel osztva, majd határátmenetre térve, kapjuk:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[a(x) + \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} \right] = a(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x, \Delta x)}{\Delta x} = a(x).$$

E szerint az x helyen differenciállal rendelkező függvénynek ott van deriváltja; a függvényt ilyen helyen differenciálhatónak mondjuk. *A keresett $a(x)$ tényező* láthatóan *éppen az $f'(x)$ deriválttal egyenlő.* Ezzel a függvény differenciálja:

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Az x független változó dx differenciáljának magát a Δx növekményt nevezzük:

$$dx = \Delta x,$$

összhangban azzal, hogy az $y = x$ függvény differenciálja:

$$dy = dx = (x)'\,\Delta x = \Delta x.$$

Így végül egy *függvény x-helyi* ***differenciálja*** *: a derivált itteni értéke szorozva a független változó differenciáljával :*

$$\boldsymbol{dy = f'(x)\,dx.}$$

Megjegyzendő, hogy a *differenciál-fogalom bevezethető a legutóbbi formulával is, feltételezve $f'(x)$ létezését.* Igazolható, hogy az így értelmezett derivált rendelkezik a fentebb ismertetett tulajdonságokkal.

A függvény differenciáljának és deriváltjának meghatározását közös néven *differenciálás*nak nevezzük.

Fontos rámutatni arra, hogy *a véges növekmények hányadosának határértékeként*, vagyis

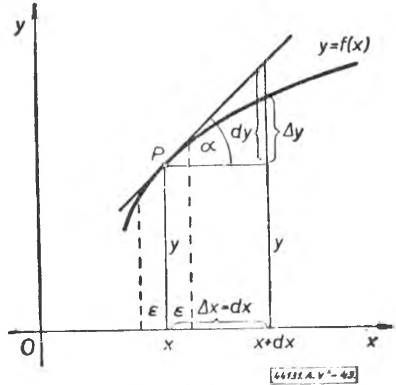
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

módon *definiált derivált a most értelmezett véges differenciálok egyszerű hányadosaként is előállítható :*

$$\frac{dy}{dx} = dy : dx = f'(x)\,dx : dx = f'(x).$$

A differenciálhányados elnevezés tehát szó szerint vehető. A deriváltnak ez a differenciálok hányadosaként való beállítása, mint látni fogjuk, igen hasznosnak fog bizonyulni.

Az $y = f(x)$ függvény $dy = f'(x)\,dx$ differenciálja ***geometriailag*** *az* $(x, x + dx)$ *szakaszon keletkező és az* (x, y) *pontbeli érintőig terjedő* (röviden: érintőmenti) *ordináta-növekménnyel*, az α rész pedig a görbementi és érintőmenti ordinátanövekmény különbségével szemléltethető (43. ábra).



43. ábra

Lehet $\Delta y \gtrless dy$, sőt $y = ax + b$ esetén $\Delta y = dy$.

A $\Delta y \approx dy$, ha $dx \approx 0$ (de $dx \neq 0$) azt jelenti geometriailag, hogy *az $y = f(x)$ függvénygörbét e kicsiny dx szakaszon* kezdeti ***érintőjével***, azaz egy $f'(x)$ iránytangensű lineáris függvénygörbével, azaz egyenessel ***helyettesítjük.***

Ezzel összhangban, **pl.** $s = s(t)$ ***mozgás*** **esetén,** a $[t, t + dt]$ **időszakban keletkezett** Δs **út-növekmény** helyett ds út-differenciált venni annyit tesz, mint a mozgást ez időszakban állandó, mégpedig $v(t) = s'(t)$ sebességű egyenletes mozgásnak tekinteni.

c) Határozott integrálra vezető feladatok és megoldásuk általános jellemzése

Még egyszer foglaljuk össze azon *meggondolásokat*, amelyek lehetővé tették *különböző fizikai és egyéb feladatok* (pl. változó erő munkája, változó sebességgel megtett út, anyagi görbe tömege, görbe alatti terület stb.) azonos matematikai eszközzel, nevezetesen *határozott integrállal való megoldását.*

Az ilyen feladatoknál *a keresett mennyiség* (pl. munka, út, tömeg, terület stb.) mindig *a független változónak* (pl. út, idő, ívhossz, abszcissza stb.) *valamely* $[a, b]$ *szakaszára vonatkozik.*

Az első lépés az $[a, b]$ *szakasz felosztása*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

részszakaszokra. E lépésnél azon *lényeges feltevéssel* élünk, hogy *a keresett mennyiségnek az egész szakaszhoz tartozó értéke egyenlő az egyes részszakaszokhoz tartozó értékek összegével. E tulajdonság az ú. n.* ***additivitás.*** **Pl.** a munka, az út, a tömeg, a terület stb. nyilván additív mennyiségek.

Ha *változó felső határú* $[a, x]$ *szakaszon* vizsgálódunk, akkor a keresett mennyiségnek erre vonatkozó értéke nyilván *az* ***x felső határ*** valamilyen $F(x)$ ***függvénye*** lesz. Ennek megfelelően e mennyiségnek a $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ részszakaszra vonatkozó értéke:

$$\Delta F(x_i) = F(x_{i+1}) - F(x_i),$$

a teljes $[a, b]$ *szakaszra vonatkozó értékét* pedig, tekintettel a mennyiség additivitására, *a következő összeg szolgáltatja:*

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta F(x_i).$$

Az $F(x)$, és így a $\Delta F(x_i)$ is egyelőre ismeretlen.

Megjegyzendő, hogy *az $F(x)$-et és a $\Delta F(x_i)$*-t mindig az adott feladatban szereplő *valamely ismert $f(x)$ függvény* (pl. erő, sebesség, sűrűség, ordináta stb., mint az út, idő, ívhossz, abszcissza stb. függvénye) *határozza meg*, mégpedig a következő módon:

Ha $f(x)$ a Δx_i részszakaszokon különböző $f(x_i) = C_i$ *állandó* értékű (görbéje lépcsős), akkor:

$$\Delta F(x_i) = f(x_i)\,\Delta x_i, \quad F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta F(x_i).$$

Ha viszont $f(x)$ *tetszőleges függvény*, de ugyanakkor az $F(x)$ *ismeretlen függvényt* ***kicsinyben közel lineárisan változó***nak (azaz a függő és független változó növekményét kicsinyben közel egyenesen arányosnak) tekinthetjük (mint a gyakorlati esetekben általában), akkor:

$$\Delta F(x_i) = f(x_i)\,\Delta x_i + \alpha_i, \quad F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta F(x_i);$$

kicsiny részszakaszok esetén pedig, a Δx_i-ben lineáris, ú. n. *főrészekre szorítkozva*, ill. a Δx_i-ben magasabb fokú, ú. n. elenyésző részeket elhanyagolva:

$$\Delta F(x_i) \approx f(x_i)\,\Delta x_i, \quad F(b) - F(a) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i;$$

végül *határátmenetben:*

$$\boldsymbol{F(b) - F(a) = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Amint $\Delta F(x_i)$ előállításából és a végeredményből látható, *az ismeretlen* $F(x)$ *függvény* — az előbbi feltevéssel összhangban — az $[a, b]$ szakaszon deriválható és *deriváltja* illetve differenciálja éppen:

$$F'(x) = f(x), \quad dF(x) = f(x)\,dx.$$

[Ugyanez *Lagrange* $\Delta F(x_i) = F'(\xi_i)\,\Delta x_i$, $x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}$ képlete alapján

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)\,\Delta x_i = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b dF(x)$$

módon is igazolható.]

A módszer lényege tehát az, hogy *az* $F(b) - F(a)$ *kiszámítása céljából az ismeretlen* $F(x)$ *függvény ugyancsak ismeretlen* $\Delta F(x_i)$ *növekményeinek összegezése helyett e növekmények ismert* $f(x_i)\,\Delta x_i$ *főrészei összegének határértékét vesszük, amikor* $\max|\Delta x_i| \to 0$. *Ez nem más mint az ismert* $f(x)$ *függvénynek, illetve az* $f(x)\,dx$ *differenciálnak az* $[a, b]$ *szakaszra vonatkozó határozott integrálja. E módszert a gyakorlatban sokszor* — némi pongyolasággal — *az* $f(x)\,dx$ *„elemek összegezése" néven emlegetjük* [ahol ezen elemek most — a határátmenetnek megfelelően — elenyésző részszakaszokra vonatkoznak].

Összefoglalva: *Ha az ismeretlen F változó — α) az* $[a, x]$ *szakasz felső határának* $F(x)$ *függvénye, β) additív tulajdonságú* és *γ) x szerint deriválható az* $[a, b]$ *szakaszon* (azaz ott kicsinyben közel lineárisan változik), *akkor e függvénynek az adott szakaszra vonatkozó keresett növekményét közvetlenül az*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b dF(x)$$

ismert (Newton—Leibniz-féle) formula alapján, vagyis az ismeretlen $F(x)$ függvény ismert $dF(x)$ differenciáljának $[a, b]$ szakaszra vonatkozó határozott integráljaként számíthatjuk, elhagyva a fentebb részletezett összes előzetes meggondolásokat.

* * *

E módszer alkalmazhatósága láthatóan az ismeretlen $F(x)$ függvény $f(x)$ deriváltjának, illetve $dF = f(x)\,dx$ *differenciáljának* *ismeretén fordul meg. Az adott konkrét feladat feltételeiből igyekszünk meghatározni* ezt az ismeretlen függvény differenciálja és a független változó differenciálja közti

$$dF = f(x)\,dx$$

kapcsolatot, *a feladat ú. n.* ***differenciálegyenletét.*** E cél érdekében megállapítjuk az $[a, b]$ szakasz tetszőleges $[x, x + dx]$ részszakaszára vonatkozó $dF(x)$ differenciált, mint a mondott szakaszon állandónak tekintett $f(x)$ függvényérték és a dx növekmény szorzatát; e differenciál — mint tudjuk — elenyésző dx növekmény ($dx \to 0$, de $dx \neq 0$) esetén a $\Delta F(x)$ növekmény főrésze. Esetenként ellenőrizhető, hogy a nyert kifejezés valóban differenciál-e, azaz rendelkezik-e a differenciál ismert jellemző tulajdonságaival.

Az ily módon *megállapitott* $dF = f(x)\,dx$ *differenciálegyenletről* (elemekről) *rátérünk az*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

határozott integrálra (az elemek összegezésére), gondosan ügyelve az a és b határok helyes, a feladat feltételeinek és a választott koordinátarendszernek megfelelő megállapítására.

Az így nyert határozott integrál tényleges kiszámítása *túlnyomórészt határozatlan integrálással* történik, az integrálszámítás ismert alapképlete felhasználásával.

Az integrál b állandó felső határa helyébe az x független változót téve, megkapjuk a keresett $F(x)$ függvényt is, ennek ismert $F(a)$ kezdeti értéke mellett:

$$\boldsymbol{F(x) = F(a) + \int_a^x f(x)\,dx}.$$

Ezzel egyszersmind meghatároztuk az F mennyiség és az x független változó közvetlen kapcsolatát, *a vizsgált folyamat ú. n.* ***integrál-törvényét***; *az $F'(x) = f(x)$ derivált a folyamat sebességét, a $dF(x) = f(x)\,dx$ differenciál pedig a folyamat ú. n. differenciál-törvényét szolgáltatja.*

Ezzel szigorúan megalapoztuk a differenciál-törvényről az integrál-törvényre való áttérést.

d) Gyakorlati megjegyzések

A műszaki gyakorlatban rendszerint mellőzzük a fentebb részletezett megfontolásokat. Hallgatólagosan *feltételezzük,* hogy az ismeretlen függvény eleget tesz az előbb említett követelményeknek. *Elhallgatjuk* a tényét és okát annak, hogy a véges részszakaszokra vonatkozó növekmények összegezése helyett az elenyésző részszakaszokra vonatkozó növekmények főrészét, az ú. n. „elemeket" összegezzük.

A műszaki gyakorlatban a határozott integrálra vezető feladatok megoldásánál *az első* (és akárhányszor legnehezebb) *lépés* rendszerint *a szóbanforgó jelenség, folyamat differenciálegyenletének,* ***differenciáltörvényének felállítása.*** Ennek során az *„elemekkel"* mint elenyésző, zérushoz tartó (de zérussal egyenlővé sosem váló) részszakaszokra vonat-

kozó, s ezért ugyanilyen nagyságrendű differenciálokkal alapműveleteket végzünk. A differenciálegyenlet felállítása a vizsgált jelenségre, folyamatra vonatkozó *észlelési adatok, tulajdonságok alapján* történik, majd mindig *a fizika valamely általános érvényű törvényének felhasználásával,* s nem utolsó sorban *bizonyos egyszerűsítő feltételek, kikötések mellett.*

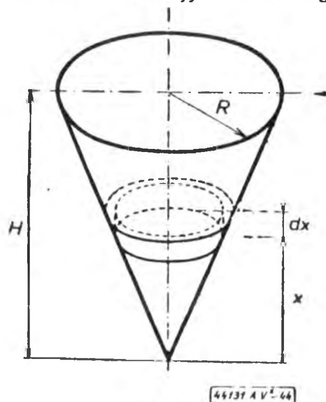
Ez utóbbiak segítségével *a valóságos jelenségnek, folyamatnak csupán leglényegesebb tulajdonságait vesszük figyelembe,* ezeket is általában többé-kevésbbé *egyszerűsítve,* míg más tulajdonságait figyelmen kívül hagyjuk — *a matematikai kezelhetőség érdekében. Ezen eljárásunkkal, az ú. n. absztrakcióval számításaink középpontjába a valóságos jelenség, folyamat helyett ennek ú. n.* ***matematikai modelljét**** *állítjuk.* Ilyen absztrakció által nyert matematikai modellek pl. az anyagi pont, a (nem korpuszkuláris szerkezetű, hanem) folytonos eloszlású anyag (kontinuum), a merev (vagyis erőhatásra nem deformálódó) test, az izotermikus atmoszféra, a lineáris karakterisztikájú elemekből álló automatikus szabályozású berendezés, a hőfoktól független ellenállású elektromos vezető stb. Egyazon problémánál több, a valósághoz különböző mértékben simuló matematikai modellt szerkeszthetünk.

Nyilvánvalóan *a matematikai modellre nyert számítási eredmények szükségképpen* ***eltérnek*** *a valóságos jelenség, folyamat mérési adataitól* — éppen az említett elvonatkoztató elhanyagolások, egyszerűsítések miatt. A modell akkor tekinthető jónak, ha ezen eltérés csekély, s *lehetőleg az alkalmazott mérési eljárások átlagos hibája alatt* marad, vagyis ezekkel nem érzékelhető.

Ha a fentiek figyelembevételével a jelenség, folyamat differenciáltörvényét felállítottuk, akkor — *a jelenség, folyamat kezdetére, illetve a benne résztvevő közeg határaira vonatkozó előírások,* ***feltételek*** *felhasználásával — határozott integrálás útján térünk rá az* ***integráltörvényre.*** A határozott integrálást igyekszünk lehetőleg egy primitív függvény megkeresésével és az integrálszámítás alapképletének igénybevételével pontosan elvégezni; sok esetben azonban meg kell elégednünk numerikus, grafikus vagy gépi közelítő módszerek alkalmazásával.

Példák

1—2. Példa arra, hogy *a keresett mennyiség növekményének nem eléggé óvatos „egyszerűsítése" a differenciál megállapításánál hibára vezethet.***



44. ábra

Határozzuk meg egy *egyenes körkúp F palástfelszínét.* Jelöljük az alapkör sugarát R-rel, a magasságát H-val. Helyezzük el a kúpot a 44. ábrán látható módon.

Írjunk az x és $x+dx$ magasságokhoz tartozó csonkakúpmetszetbe *hengert;* ennek *palástfelszínét válasszuk a ΔF főrészeként,* azaz legyen:

$$dF = 2\pi \frac{R}{H} x\,dx.$$

Innen:

$$F = 2\pi \int_0^H \frac{R}{H} x\,dx = \pi RH,$$

ami nyilvánvalóan hamis eredmény; u. i. az elemi geo-

* A matematikai modell kérdéseiről l. pl. *Egerváry* akadémikus cikkét.
** L. *Bermant* i. m. I. k., 381. és köv. o.

metriából ismeretes, hogy:

$$F = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}.$$

A hibát ott követtük el, hogy helytelenül választottuk meg a ΔF palástnövekmény főrészét.

Helyesen így járhatunk el:

A csonkakúp palástfelszíne egyenlő az alap- és fedőkör kerületének számtani közepe és az oldalvonal szorzatával, azaz:

$$\Delta F = \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi R}{H}x + \frac{2\pi R}{H}(x + dx)\right]\sqrt{\left(\frac{R}{H}\right)^2 + 1}\, dx = \frac{\pi R}{H^2}(2x + dx)\sqrt{R^2 + H^2}\, dx;$$

tehát ΔF főrésze:

$$dF = \frac{2\pi R}{H^2}\sqrt{R^2 + H^2}\, x\, dx,$$

s nem $\frac{2\pi R}{H}x$, mint előbb. Integrálva:

$$F = \int_0^H \frac{2\pi R}{H^2}\sqrt{R^2 + H^2}\, x\, dx = \frac{2\pi R}{H^2}\sqrt{R^2 + H^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^H = \pi R\sqrt{R^2 + H^2}.$$

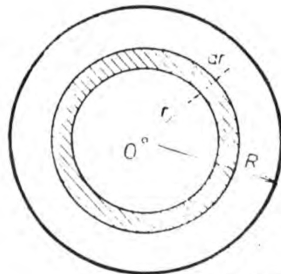
Ez az eredmény egyezik az elemi geometriából ismert eredménnyel.

Valóban az a helyzet, hogy a $dF = 2\pi\frac{R}{H}x\, dx$ *nem differenciálja a palást felszínének*; ha a $\Delta F = dF + \alpha$ előállítást ezen dF-fel alkotjuk meg, akkor $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\alpha}{\Delta x} \neq 0$, azaz a differenciál fogalmával ellenkezik. *palástfelszín differenciálja* helyesen:

$$dF = \frac{2\pi R}{H^2}\sqrt{R^2 + H^2}\, x\, dx,$$

amint fentebb már említettük.

3. *Az R sugarú kör területe.* — Ismertnek tesszük fel az r sugarú kör ***kerületét:*** $S = 2r\pi$. A terület nyilván a változó r-től függ, éspedig ez esetben r a $[0, R]$ határok között változik. A terület növekményét a 45. ábra szemlélteti. Az $[r, r + dr]$ szakaszon a kerületet állandónak véve, adódik *a terület differenciálja:* $dT = 2r\pi\, dr$. Hogy ez *valóban* a differenciál, arról könnyen meggyőződhetünk a következőképpen:



45. ábra

Nyilván

$$2\pi\, r\, dr < \Delta T < 2\pi\,(r + dr)\, dr;$$

innen

$$1 < \frac{\Delta T}{2\pi\, r\, dr} < 1 + \frac{dr}{r}.$$

Határátmenetben (mivel a bal- és jobboldali kifejezés határértéke $dr \to 0$ esetén 1):

$$\lim_{dr \to 0} \frac{\Delta T}{2\pi\, r\, dr} = 1 .$$

A differenciált tehát helyesen választottuk meg. Így a kör területe:

$$T = \int_0^R 2\pi\, r\, dr = \frac{2\pi}{2}\left[r^2\right]_0^R = R^2\pi .$$

Műszaki alkalmazások

1. A BAROMETRIKUS MAGASSÁGMÉRÉS FORMULÁI

Feladatunk annak megállapítása, hogy *az atmoszférában hogyan változik a nyomás a magasság függvényében.* Ezen egyetlen műszaki probléma kapcsán és viszonyaira konkretizálva ismételjük meg (a műszaki gyakorlattal ellentétben) az elméleti bevezetőben részletezett számos megfontolást!

Az ismeretlen függvény esetünkben *a $p(z)$ légnyomás-magasság függvény,* ahol z a tengerszinttől mért magasság (a tengerszintet s az összes többi izobár-felületet [$z =$ const] síknak tekintve).

A nyomásnak valamely tetszőleges $z_1 - z_0$ (> 0) *szakaszon bekövetkező változását,* azaz a $p(z)$ függvény $p(z_1) - p(z_0)$ növekményét *keressük.* Régi tapasztalat, hogy a p légnyomás a z magasság növekedtével csökken; *a $p(z)$ tehát monoton csökkenő függvényt,* a $pz_1 - p(z_0)$ [< 0] különbség így nyomásesést jelent.

A $p(z_1) - p(z_0)$ nyomásesés a z_1 változó felső határ függvénye; a z_0-t tekintsük állandónak, — később 0-val egyenlőnek véve a tengerszintet fogja jelezni.

$p(z_1) - p(z_0)$ nyomásesés továbbá nyilván *additív tulajdonságú,* azaz megegyezik a $z_1 - z_0$ szakasz Δz_i részszakaszaihoz tartozó nyomásesések összegével:

$$p(z_1) - p(z_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta p\,(z_i).$$

Végül a regisztráló műszerek által megrajzolt folytonos, továbbá (apró ingadozásoktól, törésektől eltekintve) monoton csökkenő és sima $p(z)$ görbe alapján az ismeretlen $p(z)$ függvényt joggal differenciálhatónak, azaz *kicsiben lineárisan változónak* tételezhetjük fel:

$$p(z_1) - p(z_0) = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta p(z_i) = \sum_{i=0}^{N-1} [p(z_i)\,\Delta z_i + \alpha_i\,(z_i, \Delta z_i)] \approx \sum_{i=0}^{N-1} p'(z_i)\,\Delta z_i ,$$

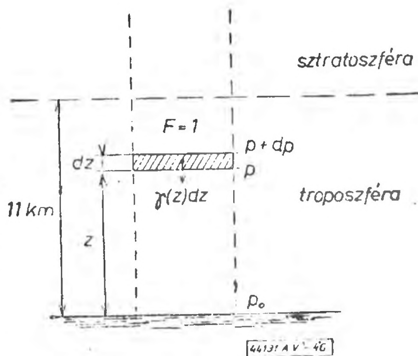
ahol N a kezdeti n részszakasz további osztása útján nyert s már kicsinek tekinthető részszakaszok száma.

Amikor *most a matematikai kezelhetőség érdekében e közelítő (approximációs) összegről határátmenet útján* [$N \to \infty$, max $|\Delta z_i| \to 0$] *át akarunk térni a*

$$\lim_{\max|\Delta z_i| \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} p'(z_i)\,\Delta z_i = \int_{z_0}^{z_1} p'(z)\,dz\ [= p(z_1) - p(z_0)]$$

határozott integrálra, a precíziós matematika fogalmára, akkor tisztában kell lennünk azzal, hogy *számításainkban e ponton elszakadunk a valóságtól, s helyébe* a matematika most említett precíziós fogalma, a fizikának különböző idealizált gázállapotváltozásokra kimondott törvényei és a (lehetőleg egyszerű) matematikai kezelhetőségre való törekvésünk által sugalmazott ***matematikai modelleket** állítjuk.*

Itt nemcsak arról van szó, hogy *a valóságban a határátmenet méréstechnikailag nem követhető* [lévén $\Delta z_i \to 0$ és megfelelően $\Delta p_i \to 0$], hanem arról is, hogy *a határátmenet során* az itt szereplő *nyomás, sűrűség (fajsúly)* mint a fizika statisztikus (a vizsgált térrészbeli levegőmolekulák átlagos kinetikai energiájával, számával kapcsolatos) fogalmai *elvesztik értelmüket a valóságos molekuláris szerkezetű levegőre nézve, s tovább csakis folytonos szerkezetűnek képzelt levegőre érvényesek.* A határozott integrál tehát, mint precíziós matematikai fogalom, csakis a valóságból való absztrakció útján nyert, folytonos eloszlásúnak képzelt anyagra, ú. n. kontinuumra alkalmazható.



46. ábra

A most említett absztrakcióval matematikai modellünk még korántsem teljes. Fentebb említettük, hogy *a tengerszintet és az összes többi izobár-felületet* (geoid helyett) *síknak tekintjük*; elegendő kis körzet felett vizsgálódva ez igen jó közelítése a valóságnak, mert pl. a tengerszinten egy $r \approx 3{,}6$ km sugarú körzet peremének lehajlása a síkhoz képest kb. 1 m. Egy újabb absztrakció, hogy a mai technika által felderíthető, 20 km-nél nem vastagabb légrétegben a Föld nehézségi erőterét homogénnek, vagyis *a g nehézségi gyorsulást állandónak tekintjük*; ez is nagy mértékben teljesül, mert a valóságban pl. 20 km magasságban a g mindössze kb. 0,8%-kal kisebb, mint tengerszinti értéke. E két utóbbi absztrakció is jelentősen egyszerűsíti a számításokat, s ugyanakkor a mondott korlátok között nem okoz számottevő hibát. *Matematikai modellünk* tehát *az eddig említett absztrakciók után* így írható le: folytonos anyageloszlású, $z = \text{const}$ izobár síkokkal rendelkező, homogén nehézségi erőtér hatása alatt álló légtömeg.

*Vizsgáljuk most e légtömeg **egyensúlyát**!* Megjegyzendő, hogy a valóságos légkör elég ritkán van ilyen állapotban. A vizsgált $z_1 - z_0$ vastagságú légréteggel együtt ennek bármely elenyésző dz vastagságú és — az egyszerűség kedvéért — egységnyi alapterületű egyenes hengeralakú *eleme is egyensúlyban* van. Egyensúlybeli légkör-modell esetén a $z = \text{const}$ vízszintes síkok valóban izobárok, s minden ilyen síkban a henger zárt vezérgörbéjére ható nyomás, mint normális irányú, egyenletesen megoszló *vízszintes erők eredője zérus. Függőleges irányban* az említett elemi henger alapjára a felfelé irányuló $1 \cdot p(z)$ erő, fedőlapjára a lefelé irányuló $-1 \cdot [p(z) + dp(z)]$ erő, az elemi henger súlypontjában pedig az ugyancsak lefelé irányuló $-g\left[\varrho(z) + \frac{d\varrho(z)}{2}\right] \cdot 1dz \approx -g\varrho(z)\,dz$ súlyerő működik (46. ábra) és *egyensúly esetén:*

$$p(z) - [p(z) + dp(z)] - g\,\varrho\,(z)\,dz = 0,$$

azaz

$$dp(z) = -g\,\varrho(z)\,dz,$$

vagy a dz-vel átosztva

$$\frac{dp(z)}{dz} = -g\,\varrho(z) = -\gamma(z).$$

E részleteredményünkben tükröződik a $p(z)$ függvény említett monoton csökkenő és differenciálható volta, továbbá az a hallgatólagos megállapítás, hogy a fentebb már — a valósággal ellentétben — folytonos eloszlásúnak tekintett levegőnk — a valóságnak megfelelően — deformálható, azaz sűrűsége változhat.

Az utóbbi összefüggést akkor tekinthetjük problémánk differenciálegyenletének, ha belőle a ϱ sűrűséget a p nyomás és a z magasság segítségével kiküszöböljük. Ezt *a valóságos gázok*

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

alakú *van der Waals-féle állapotegyenlete*, valamint a $T = T(z)$ *abszolút hőmérséklet-magasság-függvény* segítségével kellene eszközölni. Az előbbi maga is bonyodalmas, s ráadásul az utóbbi sem adható meg egyetlen egyszerű képlet segítségével. *A légkör hőmérséklete* ugyanis *az észlelések szerint* a tengerszint és kb. 11 km magasság között (e légréteg az ú. n. troposzféra) lényegesen, és nem egyszerű törvényszerűség szerint, fölötte (az ú. n. sztratoszférában) alig változik.

A matematikai kezelhetőség érdekében tehát még egyszer s utoljára absztrakcióhoz folyamodunk: *tekintsük légkörünket* (az eddigi absztrakciókon kívül) még *ideális gáznak*, azaz a

$$pv = RT$$

állapotegyenlet szerint változónak, *továbbá 11 km magasságig lineárisan csökkenő, e fölött pedig állandó hőmérsékletűnek* — ezzel már nem elhanyagolható hibát vállalva magunkra. Jelöljük 0 indexszel a tengerszintet, 11 indexszel a most említett elválasztó szintet.

Ezzel matematikai modellünk megszerkesztése teljessé vált; a fentebbiek értelmében **tehát számításaink folytonos anyageloszlású, z = const izobár síkokkal rendelkező, homogén nehézségi erőtér hatása alatt álló, egyensúlyban lévő, deformálható, lent lineárisan csökkenő, fentebb állandó hőmérsékletű, ideális gáz módjára viselkedő légkörre, mint matematikai modellre vonatkoznak.**

Troposzféramodellünk — mint mondottuk — felfelé haladva *lineárisan csökkenő hőmérsékletű* :*

$$T = T_0(1 - \tau z),$$

ahol T modellünk abszolút hőmérséklete z magasságban, T_0 a tengerszinten, τ egyelőre ismeretlen (később a politrópikus kitevő által meghatározandó) együttható. A T kifejezését a $pv = RT$ *állapotegyenletbe beírva*, majd ezt v-re megoldva, nyerjük:

$$v(z) = \frac{RT_0(1 - \tau z)}{p(z)} = \frac{1}{\gamma(z)},$$

[minthogy a $v(z)$ fajtérfogat a $\gamma(z)$ fajsúly reciproka].

Ezt a

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\gamma(z)$$

egyenletbe behelyettesítve, előttünk áll troposzféramodellünk pontos, egyszersmind a valóságos troposzféra közelítő differenciálegyenlete, *differenciáltörvénye:*

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{p(z)}{RT_0(1 - \tau z)}.$$

* L. *Gruber—Blahó* i. m. 14. és köv. o.

A függvényt és a független változót, differenciáljaikkal együtt szeparálva:

$$\frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{1}{RT_0}\frac{dz}{1 - \tau z}.$$

Végül $z_0(= 0)$ és z_1 (változó) határok között integrálva, az *integráltörvényre* jutunk:

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{1}{RT_0}\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{1 - \tau z},$$

$$\ln \frac{p(z_1)}{p(z_0)} = \frac{1}{RT_0\tau} \ln \frac{1 - \tau z_1}{1 - \tau z_0} = \ln \left[\frac{1 - \tau z_1}{1 - \tau z_0}\right]^{\frac{1}{RT_0\tau}},$$

vagy $z_0 = 0$, $p(z_0) = p_0$ és $z_1 = z$ figyelembevételével:

$$p(z) = p_0 (1 - \tau z)^{\frac{1}{RT_0\tau}}.$$

Bevezetve most az

$$\frac{1}{RT_0\tau} = \frac{n}{n - 1}, \quad \text{azaz} \quad n = \frac{1}{1 - RT_0\tau}$$

jelölést, észlelhető, hogy

$$p(z)\, v^n(z) = p(z) \frac{R^n T_0^n (1 - \tau z)^n}{p^n(z)} = p^{-(n-1)}(z)\, R^n T_0^n (1 - \tau z)^n =$$

$$= p^{-(n-1)} (1 - \tau z)^{-n} R^n T_0^n (1 - \tau z)^n = \frac{R^n T_0^n}{p_0^{n-1}} = p_0 v^n = \frac{p_0}{\gamma_0^n} = \text{const}.$$

Eszerint troposzféra-modellünkben a magassággal lineárisan csökkenő hőmérsékletet feltételezve, *a nyomás és a fajsúly között a* jól ismert $pv^n = \text{const}$ *politrópikus összefüggés áll fenn.* Adott n esetén

$$\tau = \frac{n - 1}{n}\frac{1}{RT_0} = \frac{n - 1}{n}\frac{\gamma_0}{p_0}$$

és vele

$$T = T_0 \left(1 - \frac{n - 1}{n}\frac{\gamma_0}{p_0} z\right),$$

$$p = p_0 \left(1 - \frac{n - 1}{n}\frac{\gamma_0}{p_0} z\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Egyszerű megfontolások alapján belátható, hogy amennyiben n megegyezik a levegő *adiabatikus* állapotváltozásának kitevőjével, $\varkappa = 1{,}4$-gyel, akkor a most tárgyalt hőmérséklet- és nyomáseloszlás troposzféra-modellünk *közömbös egyensúly*ának felel meg; ha pedig $n < \varkappa$, illetve $n > \varkappa$, akkor stabilis, illetve labilis az egyensúly.

A repülőgépműszerek egységes kalibrálása céljából az előbb ismertetett troposztéra-modellt *szabványosították (INA)*, a következő számadatokkal:

$$T_0 = 15° \text{ C} = 288° \, K, \quad p_0 = 1{,}033 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\gamma_0 = 1{,}225 \text{ kg/m}^3 \ldots \text{(a tengerszinten)};$$

$$n = 1{,}235 < \varkappa = 1{,}4 \ldots \text{(stabilis egyensúly)}.$$

Ezekkel

$$\frac{n}{n-1} = 5{,}26; \quad r = \frac{n-1}{n}\frac{\gamma_0}{p_0} = 2{,}257 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

és velük *a végképletek:*

$$T = 288\,(1 - 0{,}02257\,z) \ldots\ldots °\text{K},$$

$$p = 1{,}033\,(1 - 0{,}02257\,z)^{5{,}26} \ldots \text{kg/cm}^2,$$

$$\gamma = 1{,}225\,(1 - 0{,}02257\,z)^{4{,}26} \ldots \text{kg/m}^3,$$

a z-t mindháromban km-ben értve. E képletek $z = 11$ km-es magasságra a következő értékeket adják:

$$T_{11} = 216{,}5° \, K = 56{,}5° \text{ C},$$

$$p_{11} = 0{,}2306 \text{ kg/cm}^2, \quad \gamma_{11} = 0{,}3639 \text{ kg/m}^3.$$

Sztratoszféra-modellünkre térve, ebben a hőmérséklet – mint megállapodtunk – állandó, *az állapotváltozás izotermikus*, tehát *az állapotegyenlet:**

$$pv = \frac{p}{\gamma} = RT = \text{const} = \frac{p_0}{\gamma_0},$$

azaz

$$p(z) = \frac{p_0}{\gamma_0}\,\gamma(z)\,.$$

ahol most 0 indexszel a $z_0 = 11$ magasságbeli értékeket jelöljük meg. Ez utóbbi összefüggés felhasználásával nyerjük sztratoszféra-modellünk *differenciálegyenletét*:

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{\gamma_0}{p_0}\,p(z).$$

Szeparálva, majd $z_0\,(= 11)$ és z_1 (változó) határok között integrálva modellünk *integráltörvénye* adódik:

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dp(z)}{p(z)} = -\frac{\gamma_0}{p_0}\int_{z_0}^{z_1} dz\,,$$

$$\ln\frac{p(z_1)}{p(z_0)} = -\frac{\gamma_0}{p_0}(z_1 - z_0)\,,$$

vagy más alakban:

$$p(z_1) = p(z_0)\,e^{-\frac{\gamma_0}{p_0}(z_1 - z_0)}.$$

* L. *Gruber–Blahó* i. m. 14. és köv. o.

Figyelembe véve a fentebb említett szabványosított értékeket, nevezetesen:

$$p(z_0) = p_{11} = 0{,}2306 \ \text{kg/cm}^2, \qquad \frac{\gamma_0}{p_0} = \frac{\gamma_{11}}{p_{11}} = 0{,}1578 \ \text{km}.$$

kapjuk végül ($z_1 = z$ jelöléssel) a *szabványosított* sztratosztéra-modell integráltörvényét:

$$p(z) = 0{,}2306 \, e^{-0{,}1578(z-11)},$$

$$\gamma(z) = 0{,}3639 \, e^{-0{,}1578(z-11)},$$

ahol z most is km-ben értendő.

2. AZ ÖNINDUKCIÓ HATÁSA ÁRAMKÖR BE- ÉS KIKAPCSOLÁSÁNÁL

Legyen a *bekapcsolt* feszültség E volt, a körbe iktatott tekercs ohmos ellenállása R ohm, önindukciós együtthatója L Henry. Amint a fizikából ismeretes, az *önindukciós elektromotoros erő* nagysága:

$$L\frac{dI}{dt}.$$

Ez *az E állandó elektromotoros erővel szemben működik*, s ennek következtében a feszültség bekapcsolása ($t = 0$) után t időpontban az (ohmos)

$$I_0 = \frac{E}{R} \ \text{áramerősség helyett csak} \ I = \frac{1}{R}\left(E - L\frac{dI}{dt}\right)$$

észlelhető. Szeparálva az I és t változókat, nyerjük, hogy:

$$dt = \frac{L\,dI}{E - IR} \quad \text{és} \quad \frac{R}{L}\int_0^t dt = \int_0^I \frac{dI}{I_0 - I},$$

figyelembe véve az $I\,(0) = 0$ kezdeti feltételt. Integrálva:

$$\frac{R}{L}t = -\Big[\ln(I_0 - I)\Big]_0^I = -\ln\frac{I_0 - I}{I_0} \quad \text{és} \quad \frac{I_0 - I}{I_0} = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Végül:

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Eszerint *bekapcsoláskor az áramerősség exponenciálisan növekedve, elméletileg végtelen gyakorlatilag igen rövid idő alatt éri el az $I_0 = \frac{E}{R}$ ohmos nagyságot.*

Ha pl. $E = 4$ V, $R = 8\,\Omega$, $L = 0{,}2$ Hy, akkor $I = \frac{4}{8}\left(1 - e^{-\frac{8}{0{,}2}t}\right) = 0{,}5(1 - e^{-40t})$;
a $t_1 = 0{,}01$ mp-ben $I_1 = 0{,}165$ A; a $t_2 = 0{,}02$ mp-ben $I_2 = 0{,}275$ A

Kikapcsoláskor ($E = 0$, $I = I_0$, $t = 0$) az önindukció miatt ismét nem azonnal, hanem lassanként csökken az áramerősség az ohmos $I = \frac{E}{R} = 0$ értékre. Mivel most $\frac{dI}{dt}$ negatív, tehát $-L\frac{dI}{dt}$ pozitív, ennélfogva a

$$-L\frac{dI}{dt} = IR$$

szerint kikapcsoláskor *az eredetivel egyenlő irányú feszültség indukálódik.* Ekkor:

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt,$$

az $I(0) = I_0$ kezdeti feltételnek megfelelően.

Végül:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

A *kikapcsolás tehát elméletileg szintén végtelen ideig, gyakorlatilag a mp tört részéig tart.*

Az előbbi adatokkal pl. a $t_1 = 0{,}01$ mp-ben $I_1 = 0{,}335$ A; a $t_2 = 0{,}02$ mp-ben $I_2 = 0{,}225$ A.

3. RÁDIÓAKTÍV BOMLÁS*

A kísérletek tanúsága szerint (egy bizonyos mennyiségű) *rádióaktív anyagból kiinduló sugárzás intenzitása az időben*

$$I = I_0 e^{-\lambda t}$$

lefolyású; itt I_0 a sugárzás kezdeti ($t = 0$) intenzitása, a λ pedig anyagi állandó. Feltesszük hogy a rádióaktív hatás az illető elem atomjainak bomlása útján jön létre, továbbá, hogy *a sugárzás intenzitása az időegység alatt átalakuló anyag mennyiségével arányos.*

Ha t időpontban N az átalakulatlan atomok száma, és így $-\frac{dN}{dt}$ az átalakulás sebessége, akkor (egy k arányossági tényezővel) írhatjuk:

$$-k\frac{dN}{dt} = I_0 e^{-\lambda t}, \quad \frac{dN}{dt} = -\frac{I_0}{k}e^{-\lambda t}.$$

Minthogy végtelen idő alatt az egész anyag felbomlik, azaz $t = \infty$ esetén $N = 0$, ennélfogva:

$$-\int_N^0 dN = \frac{I_0}{k}\int_t^\infty e^{-\lambda t}\,dt \quad \text{és} \quad N = \frac{I_0}{k\lambda}e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\lambda t} = \frac{I}{k\lambda}.$$

Eszerint *a szét nem bomlott atomok száma* ugyanolyan törvény szerint csökken, mint *a sugárzási intenzitás*; e kettő $I = k\lambda N$ módon *egymással arányos.*

* L. pl. *Lindow* i. m.

A *felezési idő*, amely alatt az adott anyagmennyiség (N_0 atomjának) fele szétbomlik, így nyerhető:

$$T = \frac{1}{\lambda} \ln 2 = \frac{0{,}69315}{\lambda} \text{ mp.}$$

Pl.: a rádium-emanációra $\lambda = 2{,}085 \cdot 10^{-6}$ és $T = 332450$ mp $= 3{,}85$ nap; az uránra $\lambda = 4 \cdot 10^{-18}$ és $T = 6 \cdot 10^{9}$ év!

4. GOLYÓ ESÉSE VISZKÓZUS FOLYADÉKBAN*

Stokes törvénye szerint az η viszkozitású folyadékban eső r sugarú kis gömbre a nehézségi erőn kívül még a pillanatnyi v sebességgel arányos

$$S = 6\pi\eta r v$$

súrlódó erő hat. Mutassuk meg, hogy a két erő együttes hatása alatt álló *golyó sebessége nem növekedhet korlátlanul.*

A gömb mozgásának differenciálegyenlete, *Newton* törvénye értelmében:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - 6\pi\eta r v\,.$$

A változókat — az A. IV./1. §. a. ε) szerint — szétválasztjuk:

$$\frac{1}{g - av}\,dv = dt, \quad \text{ahol} \quad a = \frac{6\pi\eta r}{m}\,.$$

Integrálva mindkét oldalt $v(0) = v_0$ kezdeti feltétel mellett [l. A. IV./1. §. a. γ)], majd a *sebességet* kifejezve nyerjük:

$$v(t) = v_0 e^{-at} + \frac{g}{a}(1 - e^{-at})\,.$$

Látható, hogy $t \to \infty$ (illetve gyakorlatilag a $t \gg 1/a$) esetén a golyó sebessége a

$$v_\infty = \frac{g}{a} = \frac{mg}{6\pi\eta r}$$

véges értékhez tart.

5. MÁSODRENDŰ, TELJESEN VÉGBEMENŐ KÉMIAI REAKCIÓ**

Tegyük fel, hogy *két gázalakú vagy oldott anyag* a $t = 0$ időpontban *kémiai reakcióba lép egymással.* Legyen e pillanatban az A anyag *molkoncentrációja* (vagyis belőle az 1 liter oldatban lévő gramm-molekulasúlynyi anyagmennyiségek száma) a, a B anyagé pedig b és $a \neq b$. A reakció kezdete után t időegységgel 1 l oldatban már x molnyi A-anyag egyesült x molnyi B-anyaggal, úgyhogy a két anyag (átalakulatlan állapotban) már csak $(a - x)$, illetve $(b - x)$ molnyi mennyiségben van jelen. A fizikai kémia tanítása szerint a $\frac{dx}{dt}$ *reakciósebesség t időpontban arányos az addig még át nem alakult anyagok koncentrációjával,* azaz

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(a - x)(b - x),$$

* L. Elméleti fizikai feladatok.

** L. *Lindow* i. m. és *Alexits–Fenyő* i. m.

ahol α még ismeretlen állandó. Ebből könnyen meghatározható *az 1 l-ben egyesült molpárok x száma* és a reakció kezdetétől addig eltelt *t* idő közötti összefüggés. Ugyanis:

$$dt = \frac{dx}{\alpha(a-x)(b-x)} = \frac{dx}{\alpha(x-a)(x-b)} = \frac{dx}{\alpha(a-b)}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right].$$

Figyelembe véve, hogy *a reakció kezdetén* átalakulás még nem történt, azaz $x(0) = 0$, ezért a $[0, t]$, illetve $[0, x]$ szakaszon integrálunk és nyerjük, hogy:

$$t = \frac{1}{\alpha(a-b)}\left[\ln\frac{a-x}{b-x} - \ln\frac{a}{b}\right].$$

A még mindig ismeretlen α állandót úgy határozzuk meg, hogy megmérjük egy bizonyos t_1 időpontban a megfelelő x_1 mennyiséget!

Az $x = a$ és $x = b$ közül a kisebbikre $t = \infty$ adódik. A reakció teljes lefolyása tehát *elméletileg végtelen ideig tart; gyakorlatilag viszont* már *rövid idő* múlva nem eszközölhető az átalakulatlan anyagmennyiség mérése.

Hangsúlyozzuk, hogy $a \neq b$ feltevéssel éltünk a fentebbi számításnál. *Az $a = b$ esetben* fennálló $\frac{dx}{dt} = \alpha(a-x)^2$ differenciálegyenlet megoldása még egyszerűbben sikerül!

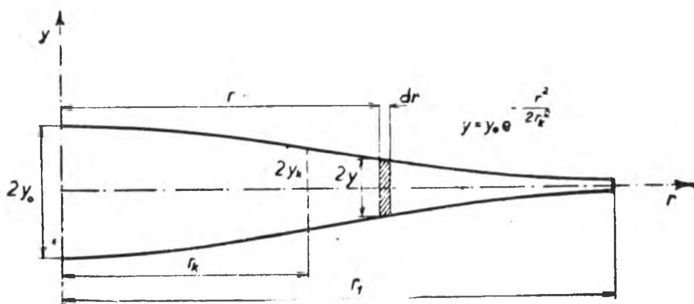
6. EGYENSZILÁRDSÁGÚ FORGÓ TÁRCSA (FURAT NÉLKÜL)*

Az ilyen tárcsa *minden pontjában a radiális és tangenciális irányú feszültség egyenlő*, azaz:

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma.$$

A 47. ábrán ábrázolt tömegelemre ható *radiális* feszültségből származó erő:

$$d(ry\sigma_r)\,d\varphi$$



47. ábra

a kétoldali *tangenciális* feszültségből adódó radiális erő:

$$y\sigma_t\,dr \cdot 2\sin\frac{d\varphi}{2} \approx y\sigma_t\,dr\,d\varphi$$

* L. *Hermann* i. m. 65. o.

és végül a *centrifugális* erő:

$$\frac{\gamma}{g} y r^2 \omega^2 \, dr \, d\varphi \, .$$

Ezek *egyensúlyát* fejezi ki (differenciálhányadosra térve) a következő differenciálegyenlet ($\sigma_r = \sigma_t = \sigma$):

$$\sigma \left[\frac{d(ry)}{dr} - y + \frac{\gamma}{g} y \frac{r^2 \omega^2}{\sigma} \right] d\varphi = 0 \, .$$

Egyszerűsítés, differenciálás és szeparálás útján nyerjük:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = - \frac{\gamma}{g} \frac{\omega^2}{\sigma} \int_0^r r \, dr, \quad \text{mert} \quad y(0) = y_0 \, .$$

Végül integrálás után *a tárcsa meridiángörbéjének egyenlete:*

$$y = y_0 e^{-\frac{\gamma \omega^2}{2 g \sigma} r^2} = y_0 e^{-\frac{r^2}{2 r_k^2}} \, ,$$

ahol r_k a görbe inflexiós pontjának távolsága a tárcsa tengelyétől.

(Számítsuk ki később az egyenszilárdságú tárcsa tömegét és inercianyomatékát $[0, r]$ szakaszán!)

7. VÍZSZINTES KÖRPÁLYÁN MOZGÓ GOLYÓ*

Köralakú vízszintes (rögzített) drótra m tömegű golyó van felfüggesztve. A golyót ezen csúszva f arányossági tényezőjű súrlódási erő fékezi. Milyen *legkisebb sebességgel* kell indítanunk a golyót, hogy *éppen visszaérkezzék a kiindulási helyre*? A drót sugara legyen r; a légellenállást figyelmen kívül hagyhatjuk.

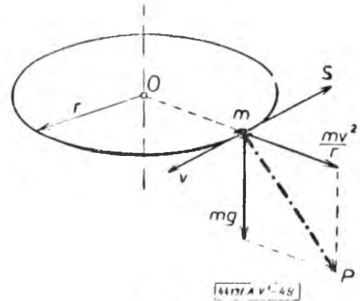
A golyó súlyánál és centripetális gyorsulásánál fogva (48. ábra) a drótra

$$P = \sqrt{(m g)^2 + \left(\frac{m v^2}{r}\right)^2}$$

nyomóerőt gyakorol, következésképpen a golyóra

$$S = f P = f \sqrt{m^2 g^2 + \frac{m^2 v^4}{r^2}}$$

fékező erő hat. Mozgásának *differenciálegyenlete* tehát:



48. ábra

$$\frac{dv}{dt} = - f \sqrt{m^2 g^2 + \frac{m^2 v^4}{r^2}}$$

(a lassulás miatt a baloldal is negatív).

A differenciálási láncszabály segítségével a t független változó helyett bevezetjük a kiindulási helytől mért s ívhosszat:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} \, ,$$

* L.: Elméleti fizikai feladatok.

majd az A. IV./1. §. a. e)-ban tanult módon szétválasztjuk a változókat:

$$\frac{v\,dv}{\sqrt{g^2+\frac{v^4}{r^2}}} = -f\,ds.$$

Végül $s = 0$-nál $v = v_0$ *kezdeti feltétel* mellett integrálva nyerjük:

$$\frac{r}{2}\int_{v_0}^{v} \frac{\frac{2v}{r}\,dv}{\sqrt{g^2+\left(\frac{v^2}{r}\right)^2}} = -f\int_0^s ds,$$

$$\frac{r}{2}\left[\operatorname{arsh}\frac{v^2}{gr} - \operatorname{arsh}\frac{v_0^2}{gr}\right] = -fs.$$

A feladat szerint a golyót legalább akkora v_0 kezdősebességgel kell indítanunk, hogy legalább az $s = 2r\pi$ utat megtéve váljék sebessége 0-vá; így a v_0-ra a következő *egyenlőtlenség* adódik:

$$0 \leq -2r\pi f + \frac{r}{2}\operatorname{arsh}\frac{v_0^2}{gr},$$

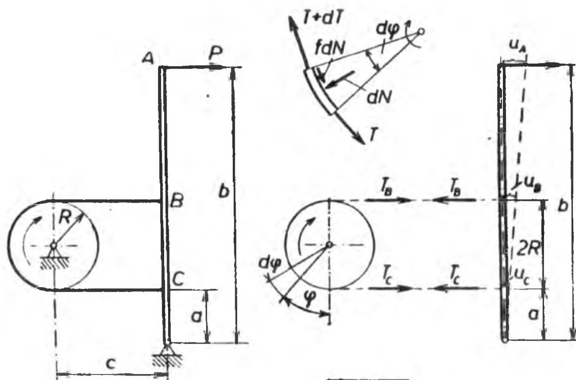
ahonnan:

$$v_0 \geq \sqrt{gr\,\operatorname{sh}4f\pi}.$$

8. SZALAGFÉK FÉKEZŐ NYOMATÉKA ÉS ELMOZDULÁSA*

Meghatározandó a 49. ábrán látható *szalagfék fékező nyomatéka és A pontjának elmozdulása a P erő függvényében.* A súrlódási tényező a szíj és a dob érintkezési felületén: f. A szíj F keresztmetszete és E rugalmassági modulusa adott; az egyszerűség kedvéért az emelőt és a dobot tekintsük abszolút merevnek.

Gondolatban messük el a szíjat a B és C helyen, és vizsgáljuk meg a szíj és az emelő *egyensúlyi feltételeit.*



49. ábra

Az *emelőé* nyilvánvalóan:

$$T_C a + T_B(a + 2R) = Pb. \qquad (1)$$

A *szíjnak* egy $R\,d\varphi$ hosszúságú kivágott elemére ható erők: T és $T + dT$, az $f dN$ súrlódás és a korong dN reakcióereje. Az elem egyensúlyi feltételeiből nyerjük:

$$dT + f\,dN = 0 \quad \text{és} \quad dN = T\,d\varphi,$$

ahonnan a szíj *differenciálegyenlete:*

$$\frac{dT}{T} = -f\,d\varphi.$$

* Феодосев i. m.

Integrálva $T(0) = T_C$ kezdeti feltétel mellett, nyerjük a *szíjhúzásra*:

$$T = T_C\, e^{-f\varphi}.$$

A $T_B = T(\pi) = T_C\, e^{-f\pi}$ kifejezést az (1)-be beírva, T_C-re a következőt kapjuk:

$$T_C = \frac{Pb}{a + e^{-f\pi}(a + 2R)}.$$

Vizsgáljuk most a *fékező nyomatékot*:

$$M = Rf\int_0^\pi dN = Rf\int_0^\pi T_C\, e^{-f\pi}\, d\varphi = T_C R\,(1 - e^{-f\pi}) = \frac{PbR\,(1 - e^{-f\pi})}{a + e^{-f\pi}\,(a + 2R)}.$$

Mielőtt az A pont elmozdulását meghatároznók, állapítsuk meg előzetesen *a szíj Δl teljes megnyúlását* a

$$\Delta l = \frac{T_C c}{EF} + \frac{T_B c}{EF} + \int_0^\pi \frac{TR\, d\varphi}{EF}$$

formula szerint. Felhasználva a fentebb nyert $T = T_C\, e^{-f\varphi}$ eredményt, írhatjuk:

$$\Delta l = \frac{T_C}{EF}\left[c + c\, e^{-f\pi} + \frac{R}{f}\,(1 - e^{-f\pi})\right].$$

Figyelembe veendő, hogy $\Delta l = u_B + u_C$, ahol u_B és u_C a B, illetve C pontok elmozdulása, továbbá a 49. ábra alapján írható:

$$u_A = u_C\,\frac{b}{a}, \quad \text{illetve} \quad u_A = u_B\,\frac{b}{a + 2R}.$$

Ezek felhasználásával nyerjük:

$$\Delta l = u_A\,\frac{a}{b}\left(1 + \frac{a + 2R}{a}\right),$$

vagy a Δl kifejezését beírva:

$$u_A = \frac{b}{2(a + R)}\,\frac{T_C}{EF}\left[c + c\, e^{-f\pi} + \frac{R}{f}\,(1 - e^{-f\pi})\right].$$

Végül T_C behelyettesítése után *a szalag A pontjának elmozdulása*:

$$u_A = \frac{P}{EF}\,\frac{b^2}{2\,(a + R)}\,\frac{c\,(1 + e^{-f\pi}) + \frac{R}{f}\,(1 - e^{-f\pi})}{a + (a + 2R)\, e^{-f\pi}}.$$

9. HAJLÉKONY, MEGFESZITETT FONAL BELÓGÁSA*

Hajlékony s a vízszintes síkon nyugvó fonalat T_0 erővel feszítsük ki a két helytálló csukló között. A vízszintes támasztósík eltávolítása után a fonal önsúlya alatt meggörbülve, függőleges síkban fog elhelyezkedni (50. ábra).

* Феодосев i. m.

Meghatározandó, *hogyan függ az* y_{max} *belógás a* (kezdeti) T_0 *feszítőerőtől és a fonal* q *folyómétersúlyától*, ha adottnak vesszük a fonal F keresztmetszetét, E rugalmassági modulusát és l hosszát.

Szemléljük a fonál dx hosszúságú *elemét* (50. ábra). Jelöljük T-vel ($T > T_0$) a meghajlított fonalban ébredő húzóerőt és ϑ-val ennek hajlásszögét. Feltételezve, hogy ez a szög kicsiny, az *egyensúlyi egyenlet* így alakul:

$$T\vartheta - q\,dx - T(\vartheta + d\vartheta) = 0,$$

vagy rendezve:

$$d\vartheta = -\frac{q}{T}\,dx.$$

50. ábra

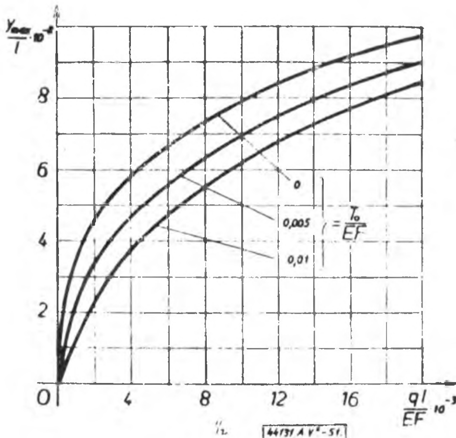
Ezt integráljuk, figyelembe véve, hogy $x = \frac{l}{2}$-nél $\vartheta = 0$, és kapjuk, hogy:

$$\vartheta = \frac{q}{T}\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Ezzel a *maximális belógást* így számíthatjuk:

$$y_{max} = \int_0^{\frac{l}{2}} \vartheta\,dx = \frac{q}{T}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{l}{2} - x\right)dx = \frac{ql^2}{8T}.$$

Vizsgáljuk most T-t. A $T - T_0$ különbség meghatározásánál figyelembe vesszük, hogy *a fonal megnyúlása* a görbe és egyenes ívhosszának különbségével egyenlő, azaz:



51. ábra

$$\Delta l = \frac{T - T_0}{EF}\,l = \int_0^l \left(\frac{1}{\cos\vartheta} - 1\right)dx =$$

$$= \int_0^l \frac{1 - \cos\vartheta}{\cos\vartheta}\,dx \approx \int_0^l \frac{\vartheta^2}{2}\,dx,$$

ha a számláló és nevező *Taylor*-sorának csak első tagjára szorítkozunk. Az integrálás eredménye:

$$\Delta l = \frac{T - T_0}{EF} = \frac{q^2 l^2}{24 T^2} \cdot$$

Ide az y_{max} képletéből a T-t behelyettesítve, némi rendezés után ezt kapjuk:

$$64 \left(\frac{y_{max}}{l}\right)^3 + 24 \frac{T_0}{EF} \frac{y_{max}}{l} - 3 \frac{ql}{EF} = 0.$$

Ezen implicit függvénykapcsolatból, az E, F, l, T_0, q ismeretében *3. fokú egyenlet megoldása útján adódik* az y_{max}. Az 51. ábrán az y_{max}/l-t a T_0/EF és a ql/EF függvényében tüntettük fel.

VÁLTOZÓ KERESZTMETSZETŰ RUDAK MEGNYÚLÁSA (10—12. pl.)*

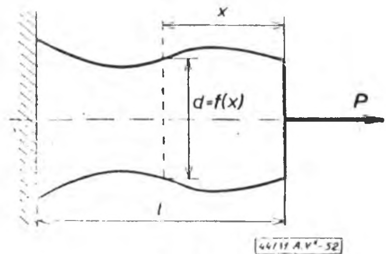
10. Egy *forgástest-alakú*, l hosszúságú rúd (lásd az 52. ábrát) az egyik végén be van fogva, a másik végét pedig a rúd tengelyirányában ható P erő terheli. Meghatározandó a rúd megnyúlása, ha átmérője, a szabad végtől számított x távolságban a $d = f(x)$ képlet alapján határozható meg. (A rúd saját súlya elhanyagolandó!)

Az $[x, x + dx]$ rúdelem megnyúlása:

$$\Delta dx = \frac{P\,dx}{\frac{\pi}{4} [f(x)]^2 E},$$

következésképpen *a rúd teljes megnyúlása:*

$$\Delta l = \frac{4P}{\pi E} \int_0^l \frac{dx}{[f(x)]^2} \cdot$$

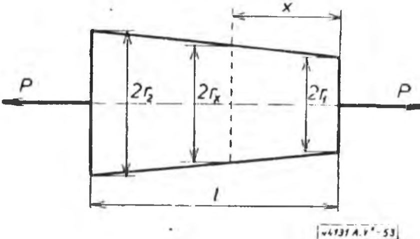


52. ábra

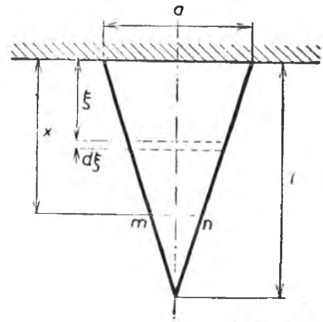
11. Egy *csonkakúp alakú* rúd (53. ábra) hossza l, fedő- és alapkörének sugara r_1 és r_2. A rudat P húzóerőkkel terheljük, melyek a rúd tengelyében hatnak. Meghatározandó a rúd megnyúlása. (A rúd saját súlya elhanyagolandó!)

Az előző feladat megoldása szerint:

$$\Delta l = \frac{4P}{\pi E} \int_0^l \frac{dx}{\left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{l} x\right)^2} = \frac{Pl}{\pi E\, r_1 r_2} \cdot$$



53. ábra



54. ábra

* L. pl. Иванов i. m.

12. Egy *kúpalakú* rudat (54. ábra) saját súlya terheli. Meghatározandó egy *mn* keresztmetszet elmozdulása és a rúd befogott végétől számított *x* távolsága közti összefüggés.

A fentebbiek értelmében

$$\Delta l(x) = \frac{\gamma}{3E}\int_0^x (l-\xi)\,d\xi = \frac{\gamma x(2l-x)}{6E}; \quad \Delta l = \frac{\gamma l^2}{6E}.$$

* * *

13. ÁRAMLÁS KÖRÍV-ALAKÚ CSŐBEN*

Valamely horizontálisan fekvő, *négyszögletes keresztmetszetű cső* AA_1, és BB_1 között (55. ábra) *körívben* meg van *görbítve*. Szelvénye: $a \cdot b$. A görbületi sugár r_1, illetve r_2. Ha a belépési sebesség, v_1 adva van, kérdés, mi az összefüggés az áramló folyadék tetszőleges *M* pontjabeli *v sebesség és r görbületi sugár között.*

A *centrifugális erő* differenciálja:

$$dC = dm\frac{v^2}{r};$$

itt a tömegelem:

$$dm = dr\,ds\,dz\frac{\gamma}{g},$$

ahol *dz* az elem vastagsága (56. ábra).

A centrifugális erő miatt a *hidraulikus nyomás* kifelé megnövekszik:

$$dp = \frac{dC}{ds\,dz} = \frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{r}dr,$$

ahol *dp* a megnövekedés értéke.

Legyen p_1 a hidraulikus nyomás AA_1-ben. A cső vízszintes helyezetű lévén, a

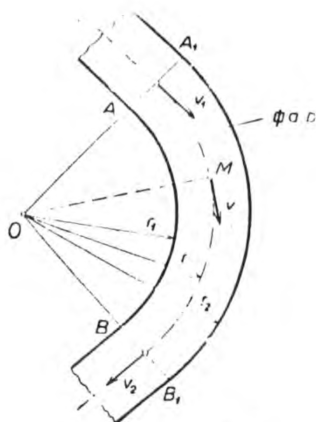
$$p_1 = p_0 + \left[z_1 - \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}\right]\gamma$$

egyenletben $z_1 = 0$ és alul:

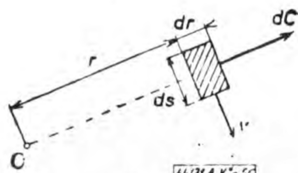
$$p = p_1 - \frac{v^2 - v_1^2}{2g}\gamma;$$

ily módon:

$$dp = -\frac{\gamma}{g}v\,dv.$$



55. ábra



56. ábra

* L. *Kövesi* i. m. 138–139. o.

A dp fentebbi két kifejezését egyenlővé téve, kapjuk *az áramlás differenciálegyenletét:*

$$\frac{\gamma}{g}\frac{v^2}{r}\,dr = -\frac{\gamma}{g}\,v\,dv;$$

egyszerűsítve:

$$\frac{v}{r}\,dr = -dv,$$

majd rendezve:

$$v\,dr + r\,dv = 0.$$

A differenciálegyenlet *megoldása* tehát:

$$v\,r = k = \text{állandó}.$$

A cső *vízhozama* ilyen sebességeloszlás mellett:

$$q = b\int_{r_1}^{r_2} v(r)\,dr = bk\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = bk\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

A b, r_2 és r_1 adott, a q mérhető, tehát az ismeretlen k állandó értéke:

$$k = \frac{q}{b\ln\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

A *sebesség-törvény* tehát végleges alakban:

$$v = \frac{q}{rb\ln\dfrac{r_2}{r_1}}.$$

14. REDUKÁLT (EGYENÉRTÉKŰ) CSŐHOSSZ SZÁMÍTÁSA*

Egy l hosszúságú vízvezetékcsövön folyadék áramlik. Intenzitása a cső hosszegységére vonatkoztatva q, a cső végén *kiömlő vízmennyiség* tehát: $Q_m = ql$.

Meghatározandó a redukált (egyenértékű) *csővezetékhossz, változatlan keresztmetszet mellett,* ha a csővezeték elejének lezárása esetén az előzően fennálló *kezdeti nyomást és az átömlő vízmennyiséget fenntartjuk.*

A kezdőponttól x távolságban dx hosszelemre *a nyomásveszteség* alapegyenlete a következő módon írható fel:

$$-dh = k^2(Q_m + ql - qx)^2\,dx,$$

vagy

$$-dh = k^2q^2\,(2l - x)^2\,dx.$$

Innen *integrálás* után nyerjük a következőt:

$$h = \frac{7k^2q^2l^3}{3}.$$

* L. 96 [illegible] i. m.

(*

Ha ugyanilyen nyomásveszteségnél lezárjuk a csővezeték elejét — fenntartva az előző átmenő vízmennyiséget — akkor a következő egyenlőség áll fenn:

$$h = k^2(2q\,l)^2\, l_e.$$

A h fentebbi két kifejezését összehasonlítva, kapjuk végül az *egyenértékű csőhosszra:*

$$l_e = \frac{7L}{3 \cdot 4} = 0{,}583\, l\,.$$

15. KORREKCIÓS TÉNYEZŐ A KÖZÉPSEBESSÉGGEL SZÁMÍTOTT KINETIKUS ENERGIÁHOZ*

A *lamináris folyadékáramlás sebességeloszlási törvénye lapos csőben* (azaz amikor a keresztmetszet $2H$ magassága kicsi a b szélességhez viszonyítva) a következő képlettel fejezhető ki:

$$u = \frac{3}{2}\, w \left(1 - \frac{x^2}{H^2}\right).$$

Meghatározandó az α korrekciós tényező, a középsebességgel számított közepes fajlagos kinetikus energiához.

Az áramlás *kinetikus energiája:*

$$E = \frac{1}{2}\int_F u^2\, dm.$$

A vizsgált esetben:

$$dm = \varrho\, u\, dF = \varrho\, ub\, dx.$$

Ezzel:

$$E = \frac{1}{2}\, 2 \int_0^H b\, \varrho u^3\, dx = b\varrho \int_0^H \frac{27}{8}\, w^3 \left(1 - \frac{x^2}{H^2}\right)^3 dx = \frac{54}{35}\, \varrho b\, H\, w^3.$$

Ha a kinetikus energiát az

$$u_k = \frac{1}{2H}\int_{-H}^{+H} u(x)\, dx = \frac{3w}{4H}\int_{-H}^{H} \left(1 - \frac{x^2}{H^2}\right) dx = w$$

középsebességgel számítjuk, akkor:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \cdot \varrho\, b\, 2Hw\;\; w^2 = \varrho\, b\, Hw^3.$$

Ily módon a középsebességgel számított $\bar{E}$ kinetikus energia $\alpha = 54/35$ *korrekciós tényezővel* szorozva adja a helyes E értéket, azaz:

$$E = \frac{54}{35}\, \bar{E}.$$

* L. Яблонский i. m.

16. SEBESSÉGELOSZLÁS LAPOS CSŐBEN*

Meghatározandó a sebességeloszlás törvénye lapos cső keresztmetszetében, *viszkózus folyadék lamináris áramlása* esetén. A keresztmetszet derékszögű és a magassága kicsi a szélességhez viszonyítva.

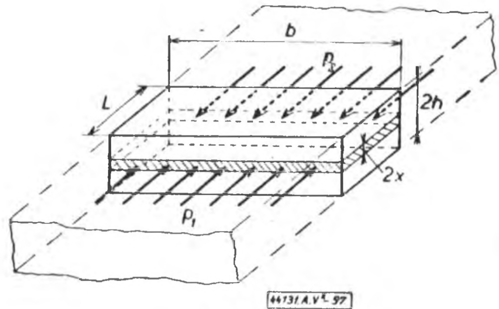
Vizsgáljuk a viszkózus folyadékáram egy elemének *egyensúlyát* (szélessége b, magassága $2x$ és hossza L), amely elem a nyomóerő hatása alatt *egyenletes mozgásban* van (57. ábra):

$$(p_1 - p_2)\, b\, 2x = 2\tau\, bL.$$

Emellett *Newton* feltevése szerint:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dx}.$$

Következésképpen *az áramlás differenciálegyenlete:*



57. ábra

$$du = -\frac{p_1 - p_2}{L\mu}\, x\, dx.$$

Integráláskor felhasználjuk az $u(\pm h) = 0$ határfeltételeket. Eszerint:

$$\int_0^u du = -\frac{p_1 - p_2}{L\mu} \int_{(\pm)h}^{x} x\, dx,$$

azaz áramlásunk *integráltörvénye:*

$$u = \frac{p_1 - p_2}{2L\mu} (h^2 - x^2),$$

és ennek következtében:

$$u(0) = u_0 = \frac{p_1 - p_2}{2L\,\mu} h^2.$$

* * *

17. TALAJ RUGALMASSÁG MODULUSÁNAK MEGHATÁROZÁSA KÖGLER-HENGERREL**

Kögler az alábbi módon kimutatta, hogy egy, a *fúrólyukba helyezett gumihengerrel a talaj rugalmassági* (összenyomódási) *modulusa meghatározható* (58. ábra).

A henger belső falára, vagyis *a furat palástfelületére ható erő* nagysága:

$$P = 2\pi\, r\, Hp.$$

* L. *Яблонский* i. m.
** L.: *Széchy* i. m. I. kt.

Ha feltételezzük, hogy a feszültségek továterjedése az általában α szöggel határolható lineárisan növekedő tartományon belül történik, akkor *a furat tengelyétől R távolságra lévő hengerpalástfelületen a nyomóerő nagysága:*

$$P_R = 2R\pi H_R p_R,$$

ahol

$$H_R = H + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(R - r)$$

a hengerpalást magassága, és p_R a hengerpalástra ható nyomás.

Tehát:

$$P_R = 2R\pi p_R\,[H + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(R - r)].$$

Miután e két erő: $P = P_R$, ily módon írható:

$$2r\pi pH = 2R\pi p_R\,[H + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha(R - r)].$$

Innen a p_R-et kifejezve:

$$p_R = \frac{pHr}{R\,[H + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(R - r)]}.$$

Az R távolságban lévő dR vastagságú *hengergyűrű* a p_R nyomás hatására *a Hooke-törvény alapján*

$$ds = \Delta d R = \frac{dR\,p_R}{E}$$

58. ábra

összenyomódást szenved. Ez más alakban:

$$ds = \Delta dR = \frac{dR\,p\,H\,r}{ER\,[H + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(R - r)]}.$$

A *teljes összenyomódást* az

$$s = \int\limits_{R=r}^{R=\infty} \Delta\, dR \cong \int\limits_{R=0}^{H=\infty} \Delta\, dR = \int\limits_{R=0}^{R=\infty} \frac{pH\,r\,dR}{ER\,[H + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(R - r)]}$$

integrál szolgáltatja.

Az integrálást elvégezve és a kapott kifejezésből E-t kifejezve, nyerjük végül *a talaj* keresett *rugalmassági modulusára*:

$$E = \frac{pH\,r}{s\,[H - 2r\,\mathrm{tg}\,\alpha]}\ln\frac{H}{2r\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

18. ÁROKBA HELYEZETT CSŐRE HATÓ FÖLDNYOMÁS MEGHATÁROZÁSA*

Árokba helyezett csőre ható nyomás meghatározása okszerűen történhetik a *silóelmélettel.* Ennek lényege az, hogy *a silózott anyag fajlagos nyomása a mélységgel növekszik ugyan, de a nyomás növekménye a súlynövekedés és súrlódás különbségéből áll elő* (59. ábra).

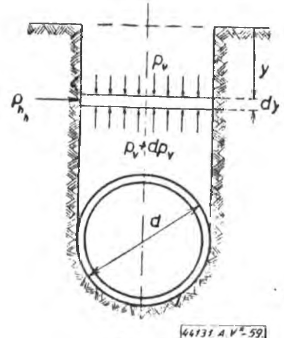
* L. *Németh:* Csatornázás.

Az ábra jelöléseit felhasználva felírhatjuk, hogy:

$$F\,dp_v = F\gamma\,dy - Kp_h\,dy\,f,$$

ahol f a súrlódási tényező a silózott anyag és a fal (esetünkben a visszatöltött és a termett talaj) között, K az 1 fm-re eső kerület, γ pedig a föld fajsúlya. *Feltesszük*, hogy $p_h f = p_v k$, ahol k egy, a talaj minőségétől függő arányossági tényező.

E feltevéssel fentebbi *differenciálegyenletünk* így alakul:



59. ábra

$$F\,dp_v = F\gamma\,dy - Kk\,p_v\,dy = (F\gamma - Kk\,p_v)\,dy.$$

Innen dy-t kifejezve:

$$dy = \frac{F}{F\gamma - Kkp_v}\,dp_v.$$

Integrálva, $p_v(0) = 0$ figyelembe vételével:

$$\int_0^y dy = \int_0^{p_v} \frac{F}{F\gamma - Kkp_v}\,dp_v,$$

$$y = -\frac{F}{Kk}\ln(F\gamma - Kkp_v) - \ln F\gamma.$$

Ezt p_v-re megoldva:

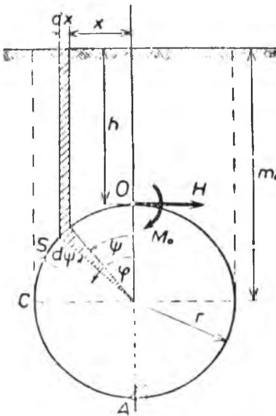
$$p_v = \frac{\gamma F}{kK}\left(1 - e^{-kK\frac{y}{F}}\right).$$

Az előbbiek szerint:

$$p_h = \frac{p_v k}{f}.$$

Ennek figyelembevételével nyerjük végül a *horizontális földnyomásra:*

$$p_h = \frac{\gamma F}{fK}\left(1 - e^{-kK\frac{y}{F}}\right).$$



60. ábra

19. CSŐRE HATÓ NYOMATÉK MEGHATÁROZÁSA, HA A CSŐ FÖLÖTT LÉVŐ FÖLDTÖMEG TELJES EGÉSZÉBEN TERHELI A CSÖVET*

A feladat megoldásánál az 1. §. d. γ) M. a. 15. példához hasonlóan indulunk el. Most azonban a csőben fellépő erők mások lesznek, mint egyenletesen megoszló terhelés esetén, mert a külső erők által ébresztett nyomaték módosul. Ez esetben ugyanis (60. ábra) az O-tól az S felé haladva *a terhelés nem lineárisan változik*, mint az előbbi példa esetében. A levezetés maga egészen addig, amíg felírjuk a külső erők által okozott nyomatékot, azonos a már tárgyalt 1. §. d. M. a. 15. feladattal. Így a kiindulási egyenletünk az említett feladatnál elírt (9) és (10) egyenlet:

$$M_0 + \frac{3}{2}H_0R = -\frac{1}{\pi}I_1 + \frac{1}{\pi}I_2$$

* L. *Németh:* Csatornázás.

és

$$M_0 + H_0 R = -\frac{1}{\pi} I_1 ,$$

ahol:

$$I_1 = \int_0^\pi M_k \, d\varphi \quad \text{és} \quad I_2 = \int_0^\pi M_k \cos\varphi \, d\varphi .$$

Vizsgáljuk most, mekkora lesz *a külső erő nyomatéka*. Ez más lesz a cső alsó és más lesz a cső felső részén. A cső *felső részén* valamely dx elemi szélességű földprizma súlya:

$$\gamma(m_0 - r\cos\psi)\, dx$$

és mivel

$$x\, r \sin\psi,$$

$$dx = r\cos\psi\, d\psi,$$

az elemi földprizma súlya polárkoordinátákkal a

$$\gamma(m_0 - r\cos\psi)\, r\cos\psi\, d\psi$$

alakban írható.

A terhelő erő nyomatéka a φ szöggel jellemzett S pontra — figyelembe véve, hogy a kar

$$r(\sin\varphi - \sin\psi)$$

módon fejezhető ki — így írható:

$$M_{kf} = \gamma r^2 \int_0^\varphi (m_0 - r\cos\psi)\cos\psi(\sin\varphi - \sin\psi)\, d\psi =$$

$$= \gamma r^2 m_0 \frac{\sin^2\varphi}{2} - \gamma r^3 \left(\frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi\sin\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right).$$

Az *alsó körnegyedre* pedig ugyanez így alakul:

$$M_{ka} = \gamma r^2 m_0 \left(\sin\varphi + \frac{1}{2}\right) - \gamma r^3 \left(\frac{\pi}{4}\sin\varphi - \frac{1}{3}\right).$$

Ezekután felírható, hogy:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{kf}\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} M_{ka}\, d\varphi ,$$

és

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{kf}\cos\varphi\, d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} M_{ka}\cos\varphi\, d\varphi.$$

Az M_{kf} és M_{ka} értékeit behelyettesítve, az integrálást a kijelölt határok között elvégezve, azután az I_1 és I_2-re kapott értékeket a kiindulási egyenletekbe visszahelyettesítve, végül ezen egyenleteket megoldva, kapjuk a keresett *reakcióerőre* és *-nyomatékra*:

$$H_0 = 0{,}1061\,\gamma\, mr + 0{,}1686\,\gamma r^2,$$

$$M_0 = -\,0{,}29941\,\gamma\, mr^2 + 0{,}34156\,\gamma r^3.$$

* * *

FELADATOK AZ OHM-TÖRVÉNYRE* (20–22. pl.)

Ohm törvénye értelmében a t időpontban U(t) kapocsfeszültségű és R(t) ohmos ellenállású áramkörben az áramerősség:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R(t)}$$

[Itt figyelmen kívül hagytuk az áramerősség $\frac{dI(t)}{dt}$ változási sebességével arányos önindukciós ellen-elektromotoros erőt.] Rendszerint $R(t) = \text{const.}$

Az áramerősség másrészt definíciószerűen a $Q(t)$ elektromos töltés változási sebessége:

$$\frac{dQ}{dt} = I(t).$$

Ily módon elektromos áramlásunk *differenciálegyenlete*, az $I(t)$ két kifejezéséből:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{U(t)}{R(t)}, \quad \text{ill.} \quad dQ = \frac{U(t)}{R(t)}\,dt.$$

A $t_0 \leqq t \leqq t_1$ időszakban az áramkörön *átáramló töltés mennyisége* tehát:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} \frac{U(t)}{R(t)}\,dt.$$

Ezek figyelembevételével oldjuk meg a 20—22. példákat!*

20. Egy áramkör kapocsfeszültsége $U = 120$ V. A körbe másodpercenként $0{,}1\,\Omega$ ellenállást iktatunk be, egyenletesen. Ezenkívül a körben van még $10\,\Omega$ állandó ellenállás is. Hány Coulomb töltés áramlik keresztül a körön 2 perc alatt?

Az áramkör *ellenállása* a bekapcsolás után t másodperccel:

$$R(t) = 10 + 0{,}1\,t \quad [\Omega];$$

ugyanakkor az *áramerősség*:

$$I(t) = \frac{U}{R(t)} = \frac{120}{10 + 0{,}1t} \quad [A].$$

* L. Берман i. m.

A [0, 120] időszakban a körön *átáramló töltésmennyiség* tehát:

$$Q = \int_0^{120} I(t)\,dt = \int_0^{120} \frac{120\,dt}{10 + 0{,}1t} = 1200 \ln \frac{22}{10} =$$

$$= 1200 \ln 2{,}2 = 1200 \cdot 0{,}79 \approx 948 \text{ Coulomb.}$$

21. Egy áramkör kapocsfeszültsége kezdetben 120 V, majd egyenletesen csökken másodpercenként 0,01 V-tal. Egyidejűleg a körbe állandó sebességgel ellenállást iktatunk 0,1 Ω-ot másodpercenként. Ezenkívül a körben van 12 Ω állandó ellenállás. Hány Coulomb töltés áramlik keresztül a körön 3 perc alatt?

22. Egy fémvezető ellenállása a hőmérsékletváltozás következtében (közönséges hőmérsékleti határok között) az $R_\vartheta = R_0 (1 + 0{,}004\,\vartheta)$ összefüggés szerint változik, ahol R_0 az ellenállás 0 C°-on és ϑ a hőmérséklet C°-ban. (Ez az összefüggés a fémek nagy részére érvényes.) A vezető, melynek ellenállása 0 C°-on 10 Ω, egyenletesen felmelegszik $\vartheta_1 = 20°$-ról $\vartheta_2 = 200°$-ra 10 perc alatt. Ezen idő alatt 120 V feszültség hajt rajta keresztül áramot. Hány Coulomb töltés áramlik át közben a vezetőn?

* * *

FELADATOK A NEWTON-FÉLE LEHŰLÉSI TÖRVÉNYRE STB.* (23–27. pl.)

Newton lehűlési (melegedési) *törvénye értelmében a test* $\frac{d\tau}{dt}$ *hőfokváltozási sebessége bármely t időpontban arányos a test τ és a környezet* τ_k *hőfokának különbségével.* A hőfokváltozási folyamat *differenciálegyenlete* tehát:

$$\frac{d\tau}{dt} = c\,(\tau_k - \tau)\,,$$

illetve

$$\frac{d\tau}{\tau_k - \tau} = c\,dt\,.$$

Adott τ_k, valamint 2 összetartozó τ és t értékpár esetén a folyamat *integráltörvénye* (a c arányossági tényezővel együtt) határozott integrálás útján meghatározható

Ezek alapján oldjuk meg a 23–27. példákat.

23. Egy 25° hőmérsékletű testet termosztátba helyezünk. (A termosztát hőmérsékletét 0°-on tartjuk.) Mennyi idő múlva hűl le a test 10°-ra, ha 20 perc alatt 20°-ra hűlt le?

Esetünkben:

$$\tau_k = 0°,\ t_0 = 0',\ \tau_0 = 25°\ ;$$

$$t_1 = 20',\quad \tau_1 = 20°.$$

Kérdés, hogy $\tau_2 = 10°$-ra mekkora t_2 alatt hűl le a test.

Folyamatunk *differenciálegyenlete* tehát:

$$\frac{d\tau}{dt} = -c\tau, \quad \text{illetve} \quad \frac{d\tau}{\tau} = -ct\,.$$

* L. Берман i. m.

Integrálva a fentebbi határok között, nyerjük, némi rendezés után:

$$\tau = 25\, e^{-ct} \quad \text{és} \quad \tau = 20\, e^{-c(t-20)}.$$

A kettő hányadosát véve:

$$1 = \frac{20}{25} e^{20c},$$

ahonnan a c arányossági tényező:

$$c = \frac{1}{20} \ln 1{,}25 .$$

Ezzel a keresett *integráltörvény:*

$$\tau = 25\, e^{-\frac{t}{20} \ln 1{,}25} = 25 \cdot 1{,}25^{-\frac{t}{20}} = 25 \cdot 0{,}8^{\frac{t}{20}}.$$

A test $\tau_2 = 10°$-ra tehát

$$t_2 = 20\, \frac{\ln \frac{10}{25}}{\ln 0{,}8} = 82'$$

alatt hűl le.

24. Egy 30° hőmérsékletű test 30 percig tartózkodva a 0°-os termosztátban, 22,5°-ra hűl le. Mekkora lesz a test hőmérséklete a kísérlet megkezdése után 3 óra múlva?

25. Mennyi idő alatt melegít fel egy *villamos berendezés* 1 kg vizet 20°-ról 100°-ra, ha a feszültség értéke 120 V, a spirális ellenállása 14,4 Ω, a szobában lévő levegő hőfoka 20°, és ha ismeretes, hogy 1 kg víz 10 perc alatt hűl le 40°-ról 30°-ra. — (A *Joule-Lenz* törvény értelmében: $Q = 0{,}24\, I^2 Rt$, ahol Q a hőmennyiség grammkalóriában, I az áramerősség Ampère-ben, R az ellenállás Ω-ban, t az idő másodpercben. Ezenkívül használjuk fel a *Newton*-féle lehűlési törvényt.)

*26. Egy *elektromos töltésű test* fokozatosan elveszti töltését a tökéletlen szigetelés következtében. Határozzuk meg a töltést az idő függvényében, feltéve, hogy a test kisülésének sebessége arányos a rajta lévő töltéssel. (A kezdeti töltés E_0, az arányossági együttható k.)

*27. Ha 3 m vastag *vízréteg*en keresztülhaladva a *fény* kezdeti mennyiségének felére csökken, akkor mekkora mennyiség jut el 30 m mélyre? — (A *vékony* réteg által elnyelt fény mennyisége arányos e réteg vastagságával és a felületére eső fény mennyiségével.)



FIZIKAI-KÉMIAI FELADATOK* (28–34. pl.)

28. Valamely *fermentum* 1 g-nyi tömege 1 óra alatt 1,2 g-ra növekszik fel. A *növekedés sebessége minden pillanatban arányos az akkori anyagmennyiséggel.* Kérdés, hogy az erjedés kezdete után 5 órával hány g lesz a fermentum?

A növekedés sebessége, mint a tömeg időszerinti deriváltja most a pillanatnyi tömeggel arányos. Az erjedési folyamat *differenciálegyenlete* tehát:

$$(v =)\ \frac{dm}{dt} = c\, m, \quad \text{illetve} \quad \frac{dm}{m} = c\, dt .$$

* L. Берман i. m.

A folyamat e differenciáltörvényéről határozott integrálással térünk rá az integráltörvényére. A közölt mérési adatok szerint:

$$m(0) = 1 \text{ és } m(1) = 1{,}2.$$

Irhatjuk tehát, hogy:

$$\int_1^m \frac{dm}{m} = c\int_0^t dt \quad \text{és} \quad \int_{1,2}^m \frac{dm}{m} = c\int_1^t dt.$$

Az integrálást elvégezve, kapjuk némi átalakítással:

$$m = e^{ct} \quad \text{és} \quad m = 1{,}2\, e^{c(t-1)}.$$

A kettő hányadosa:

$$1 = 1{,}2\, e^{-c},$$

ahonnan a c arányossági tényező:

$$c = \ln 1{,}2.$$

Ezt beírva m bármelyik kifejezésébe, kapjuk az *integráltörvényt*, teljesen határozott alakban:

$$m = e^{\ln 1{,}2 \cdot t} = 1{,}2^t.$$

A fermentum tömege tehát a $t = 5$ időpontban:

$$m(5) = 1{,}2^5 = 2{,}489 \text{ g}.$$

29. Egy zárt edényben *kén* és *hidrogén* van. A hidrogén kezdeti mennyisége 1 g, 12 óra múlva már csak 0,832 g. Mennyi hidrogén lesz 24 óra múlva? — (A reakció így játszódik le: $H_2 + S = H_2S$. A nyert H_2S abszorbeálódik úgy, hogy a reakció irreverzibilisnek tekinthető. A kéngőz koncentrációja a kezdeti folyékony állapot következtében állandó így a lefolyó reakció *elsőrendű reakció*nak tekinthető.)*

30. Az *ecetsavas etiléter elszappanosodása marónátronnal* a következő reakció szerint folyik le:



$$CH_3COOC_2H_5 + NaOH = CH_3COONa + C_2H_5OH$$

(*másodrendű reakció*). A kísérlet kezdetén az éteroldat koncentrációja $a = 0{,}01$ mol/l és a marónátron koncentrációja $b = 0{,}002$ mol/l. 25 perc eltelte után az éter koncentrációja kezdeti értékének 10%-ával csökkent. Mennyi idő múlva csökken 15%-ával?

31. A *vasklorid és ónklorid közötti reakció* a következő módon folyik le:



$$2FeCl_3 + SnCl_2 = 2FeCl_2 + SnCl_4$$

(*harmadrendű reakció*). A kísérlet kezdetén az $SnCl_2$ koncentrációja 0,06250 mol/l, az $FeCl_3$ koncentrációja pedig 0,12500 mol/l. A reakció megkezdése után 1 perccel az $SnCl_2$ koncentrációja 0,04816 mol/l. Mekkora lesz az $SnCl_2$ koncentrációja 11 perccel a kísérlet megkezdése után?

32. A *reverzibilis kémiai reakció* a következő módon folyik le: $A + B \rightleftarrows C + D$; A és B kezdeti koncentrációja rendre a és b, míg C és D kezdeti koncentrációja 0. Állítsuk fel a folyamat differenciálegyenletét, feltételezve, hogy a *reakció másodrendű*.

33. Az *erjedés* kezdete után 2 órával a *fermentum* mennyisége 2 g és 3 óra múlva 3 g. Mennyi volt a fermentum kezdeti mennyisége? (L. a 28. példát!)

* L. az 5. példát!

34. Két kg *sót* oldunk 30 l *vízben*. 5 perc elteltе után 1 kg só feloldódott. Mennyi idő múlva oldódik fel a só kezdeti mennyiségének 99%-a? — (Az *oldódási sebesség* arányos a fel nem oldott só mennyiségével és telített oldat koncentrációja — ami 1 kg 3 l-re — és az oldat pillanatnyi koncentrációja közötti különbséggel.)

* * *

KÉMIAI-KINETIKAI FELADATOK* (35—38. pl.)

35. A *dibróm-borostyánkősav oldatát* melegítve, az elbomlik a következő egyenlet szerint:



$$H_2C_4H_2Br_2O_4 = H_2C_4HBrO_4 + HBr$$

(*elsőrendű reakció*). 50 C° hőmérsékletnél a sebességi együttható 0,000261. A dibróm-borostyánkősav kezdeti koncentrációja 0,025 mol/l. *a)* Mekkora lesz a koncentrációja 3 órával a kísérlet megkezdése után? *b)* Mennyi idő múlva bomlik el a sav 99%-a (azaz gyakorlatilag befejeződik a reakció)? *c)* Mikorra bomlik el a sav 100%-a? (Az időt másodpercekben, a koncentrációt mol/liter-ben adjuk meg.)

36. A *hidrogénperoxid* melegítéskor — nagy katalizátor jelenlétében — elbomlik a következő módon:



$$H_2O_2 = H_2O + O.$$

A reakció kezdete után 10 perccel a H_2O_2 koncentrációja 0,276 mol/l, 20 perc múlva 0,165 mol/l. Számítsuk ki a sebességi együttható értékét, ismerve, hogy a *reakció elsőrendű*. (Az időt percekben, a koncentrációt mol/l-ben adjuk meg.)

37. Egy 3 literes edényben *levegő* van, melynek *oxigén*tartalma 20%. Az edénybe két cső vezet. Az egyik csövön keresztül tiszta oxigén ömlik az edénybe, a másikon ugyanannyi levegő távozik. Mennyi oxigén lesz az edényben, miután 10 l gáz átáramlott rajta? Keveréssel biztosítjuk, hogy az oxigén koncentrációja az egész edényben állandó legyen.

38. Az a% (= 8%) CO_2 tartalmú *levegőt* bocsássuk át *elnyelő közeg*et tartalmazó hengeres edényen. Ott egy vékony réteg elnyel bizonyos mennyiségű gázt, amely *arányos a koncentrációval és a réteg vastagságával*. *a)* Ha a levegő CO_2 tartalma H cm (= 10 cm) vastagságú rétegen áthaladva b% (= 2%)-ra csökken, akkor milyen H_1 vastagságúnak kell választani az elnyelő réteget, hogy az edényből kijövő levegő csupán c% (= 1%) széndioxidot tartalmazzon? *b)* Hány % széndioxid marad a levegőben, ha 30 cm vastag elnyelő rétegen halad keresztül?

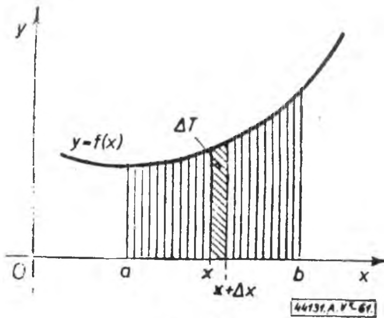
* L. Берман i. m.

3. §. TERÜLETSZÁMÍTÁS

a) Görbe alatti terület számítása

α) Terület-differenciál. Előjeles terület

α_1) *Keressük* a derékszögű koordinátarendszerben az $y = f(x)$ *függvény görbéje alatti terület* $[a, x]$ szakaszra eső része $T(a, x)$ mérőszámának, mint az x változó felső határ függvényének ***differenciá** ját,* az $[x, x + \Delta x]$ szakaszon. A 61. ábrán feltüntetett esetben:



61. ábra

$$f(x)\,\Delta x < \Delta T < f(x+\Delta x)\,\Delta x.$$

Az abszcissza (véges) $\Delta x = dx$ növekményével osztva:

$$f(x) < \frac{\Delta T}{\Delta x} < f(x+\Delta x).$$

A $\Delta x = dx \to 0$ határátmenet esetén (hacsak az $f(x)$ az $[a, b]$ szakaszon folytonos)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{dT}{dx} = f(x),$$

vagy differenciálalakban:

$$dT = f(x)\,dx.$$

A $T(a, x)$ területmérő függvény dT differenciálja tehát: az $f(x)$ függvénynek és az x független változó dx differenciáljának a szorzata; ez geometriailag a dx alapú és $f(x)$ magasságú téglalap területi mérőszáma.

α_2) Ennek birtokában az $y = f(x)$ *függvény görbéje alatti* **terület** $[a, b]$ *szakaszra eső részének mérőszáma*, az $y = f(x)$ függvény $F(x) + C$ határozatlan integráljának felhasználásával:

$$T(a,b) = \int_a^b dT = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b = F(b) - F(a) \quad (b > a).$$

A területnek a felső (illetve alsó) határtól való függése jellemzésére a b (illetve a) adott szám helyett x_1 (ill. x_0) *változó felső* (illetve alsó) *határral* dolgozunk. Pl.:

$$T(a,x_1) = \int_a^{x_1} f(x)\,dx, \quad a \leq x \leq x_1.$$

*α_3) Fentebb feltételeztük, hogy az $f(x)$ *függvény* az $[a, b]$ szakaszon *folytonos és egyértékű*, továbbá, hogy mind az $[a, b]$ szakasz, mind pedig ott mindenütt az $f(x)$ függvényérték *korlátos* (nem végtelen).

Az $[a, b]$ szakaszon folytonos $f(x)$ függvénynek — mint ismeretes [l. A. IV./1.§. a) δ.] — ott *van* $F(x)$ *primitív függvénye*; ilyen esetben tehát a területszámítás céljára rendelkezésünkre áll a határozatlan integrálás nagyfontosságú segédeszköze.

Amint az 1. §-ban láttuk, általánosabb feltételek mellett, ***primitív függvény nélkül*** is számítható egy $y = f(x)$ függvény görbéje alatti terület valamely $[a, b]$ szakaszon, nevezetesen *Riemann-összeg határértéke útján.* Említettünk ott olyan általánosabb tulajdonságú függvényeket, amelyeknél e határérték létezik, véges és a határátmenet módjától független, vagyis amelyek a mondott szakaszon Riemann szerint integrálhatók. Az ilyen számítások azonban — mint láttuk az 1. §-ban — igen bonyodalmasak; ezért a ***gyakorlatban sohasem*** kerül sor Riemann-összeg határértékével való területszámításra.

*Olyan esetekben, amikor az $f(x)$ függvény $F(x)$ primitív függvénye valamilyen ok miatt nem ismeretes, numerikus, grafikus vagy gépi módszerekkel eszközöljük a területszámítást.**

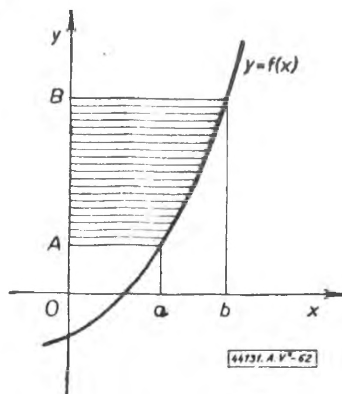
α_4) Előfordul, hogy az $y = f(x)$, illetve $x = \varphi(y)$ *függvény görbéje és az* ***y-tengely*** *közti terület mérőszámát keressük* az y tengely egy $A \leq y \leq B$ szakaszán. Olykor az x és y tengely, valamint a görbe közti területet is célszerű ilyen felfogásban számítani. Ilyen esetekben a következő *formulákkal* dolgozunk:

$$T(A, B) = \int_A^B x(y)\, dy,$$

vagy $[y = f(x)$ helyettesítéssel$]$:

$$T(A, B) = \int_a^b x f'(x)\, dx,$$

ahol $A = f(a)$, $B = f(b)$, illetve $a = \varphi(A)$, $b = \varphi(B)$ (62. ábra).

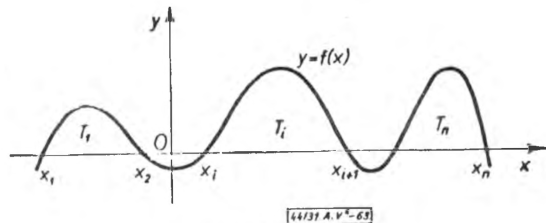


62. ábra

α_5) A görbe alatti terület *pozitív* mérőszámú, ha a terület az x tengely felett van $[f(x) \geq 0]$; *negatív,* ha alatta van $[f(x) \leq 0]$. Ha a görbe az adott szakaszon metszi az x tengelyt, esetleg többször is, akkor *formulánk az x tengely felett és alatti részterületek **előjeles** területi mérőszámainak algebrai összegét szolgáltatja.*

β) **Geometriai terület** Ha derékszögű koordinátarendszerben a görbe és az x tengely által határolt síkrész geometriai területét keressük (két tetszőleges zérushely, pl. x_1 és x_n közötti szakaszon), akkor nyilván az egyes, x tengely feletti és alatti *részterületek előjeles mérőszámainak* ***abszolút értékét kell összegeznünk*** (63. ábra):

$$T_{geom} = \sum_{i=1}^{n} |T_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right| .$$



63. ábra

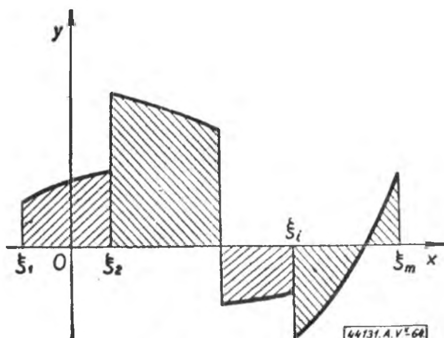
Hasonlóan egyenként számítandók azon területrészek, amelyeket a görbe (egyelőre véges) *szakadási helyei* (ξ_i) választanak el egymástól (64. ábra).

* L. 1. §. f), g) — *Bermant* i. m. I. kt., 388—90. o. — Б. Н. Делоне: Краткий курс математических машин. Гостехиздат, 1952.

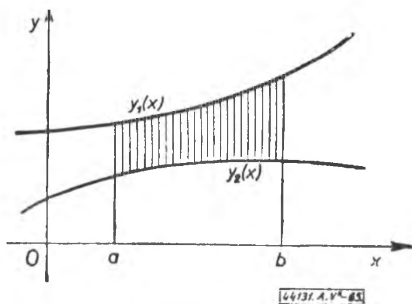
γ) Két (vagy több) görbe közti terület derékszögű koordinátarendszerben

γ_1) Ha az $[a, b]$ *szakaszon* minden x helyhez két ordináta, $y_1(x)$ és $y_2(x)$ tartozik, úgy, hogy ott *mindenütt* $y_1(x) \geqq y_2(x)$, akkor *a két görbe közti terület mérőszámát* az adott szakaszon a

$$T(a, b) = \int_a^b y_1(x)\,dx - \int_a^b y_2(x)\,dx = \int_a^b [y_1(x) - y_2(x)]\,dx$$



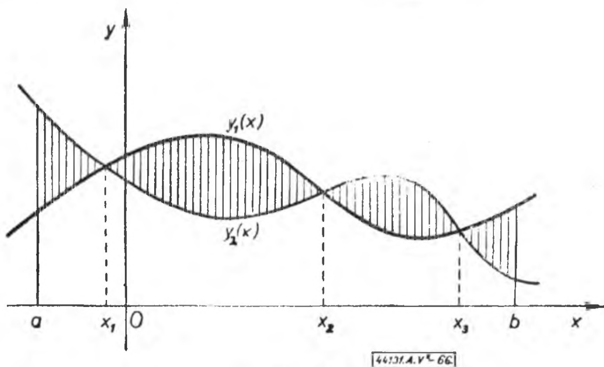
64. ábra



65. ábra

módon számítjuk. E mérőszám *pozitív*nak adódik [kizárva az $y_1(x) \equiv y_2(x)$ esetet, amikor $T(a, b) = 0$] (65. ábra).

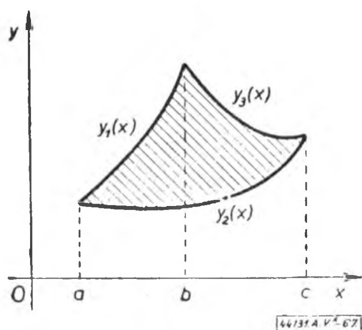
γ_2) Ha azonban az adott szakaszon nem marad mindenütt $y_1(x) \geqq y_2(x)$, azaz *a két görbe egy vagy több pontban metszi egymást,* akkor e metszéspontok (x_i) által elválasztott *területrészek egyenként számítandók.* Amely (x_i, x_{i+1}) részszakaszon $y_1(x) \geqq y_2(x)$, ott az előbbi módon számított $T(x_i, x_{i+1}) > 0$; amely $[x_l, x_{l+1}]$ részszakaszon viszont $y_1(x) \leqq y_2(x)$, ott $T(x_l, x_{l+1}) < 0$. E részterületek (előjeles) mérőszámainak abszolút értékét összegezve az adott szakaszon, ott a két görbe közti geometriai terület (abszolút) mérőszámához jutunk (66. ábra).



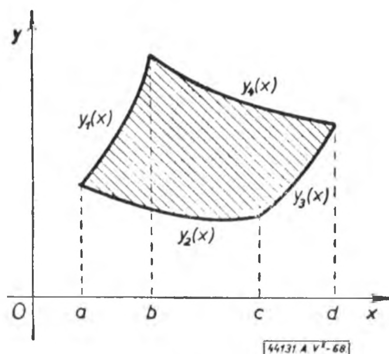
66. ábra

γ_3) *Három, vagy több görbével határolt terület* (67. és 68. ábra) *számítását két-két görbe közti terület számítására vezetjük vissza.* Pl. a 67. ábrán feltüntetett esetben:

$$T = \int_a^b [y_1(x) - y_2(x)]\,dx + \int_b^c [y_3(x) - y_2(x)]\,dx\,.$$



67. ábra



68. ábra

δ) **Paraméteres megadás**

Ha *a görbe* a derékszögű koordinátarendszerben $x = x(t)$, $y = y(t)$ *paraméteres egyenletrendszerével van megadva,* akkor *a területdifferenciál:*

$$dT = y\,dx = y(t)\,dx(t) = y(t)\,\dot{x}(t)\,dt,$$

tehát *a görbe alatti terület* az $a(\gamma) \leq x(t) \leq b(\delta)$ szakaszon:

$$T(a, b) = \int_{\gamma}^{\delta} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt,$$

vagy az $a(\gamma) \leq x(t) \leq x_1(t_1)$ *változó szakaszra* vonatkozólag:

$$T(a, x_1) = \int_{\gamma}^{t_1} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt\,;$$

[megkívánjuk, hogy az $y = f(x)$ és az $\dot{x}(t)$ legalább részszakaszonként folytonos legyen, miközben $a(\gamma) \leq x(t) \leq b(\delta)$].

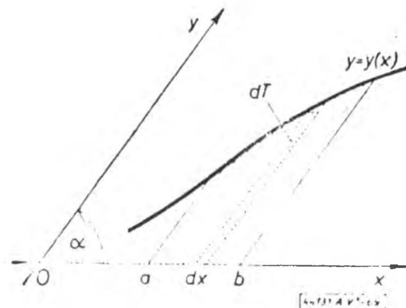
ε) **Ferdeszögű koordinátarendszerben**

Legyen az y és az x tengely hajlásszöge $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Akkor *a területelem* nyilván (69. ábra):

$$dT(x) = \sin\alpha \cdot y(x)\,dx\,;$$

az $[a, b]$ szakaszmenti *terület* tehát:

$$T(a, b) = \sin\alpha \int_{a}^{b} y(x)\,dx\,.$$



69. ábra

Példák és feladatok

α 1. Határozzuk meg az $y = x^2$ *parabola* alatti területet

a) a $[2, 3]$ szakaszon:

$$T = \int_2^3 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

b) a $[-1, 0]$ szakaszon;
c) a $[-1, +2]$ szakaszon. } (L. hátul!)

2. Hasonló módon határozzuk meg az $y = \sin x$ függvény görbéje alatti területet a következő szakaszokon:

a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

b) $[0, \pi]$; (L. hátul!)

c) $[0, 2\pi]$; $T = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -1 + 1 = 0.$

A terület 0 mérőszámú, mert fele az x tengely fölött, fele pedig az x tengely alatt van [V. ö. α_5)].

d) $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; $T = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -1.$

A területi mérőszám *negatív* előjellel adódott, mert a görbe e szakaszon az x tengely alatt halad.

3. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x^2}$ görbe alatti területet

a) az $[1, 3]$; *b)* a $[-3, -1]$; *c)* az $[1, 1000]$ szakaszon.

4. Hasonló a feladat az $y = \frac{1}{x}$ görbénél az $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ és $[1, 2]$ szakaszon.

5. Határozzuk meg azt az x *abszcisszát*, melyre az $y = \frac{1}{x}$ görbénél *a)* $T(1, x) = 10$, illetve *b)* $T(1, x) = 1000$.

a) $T(1, x) = \left[\ln x\right]_1^x = \ln x - \ln 1 = 10, \quad x = e^{10}.$

b) $T(1, x) = \left[\ln x\right]_1^x = \ln x - \ln 1 = 1000, \quad x = e^{1000}.$

[Mivel $x \to \infty$ esetén $T(1, x) \to \infty$, így bármilyen nagy adott $T(1, x)$ területi mérőszámhoz megállapítható a megfelelő x abszcissza.]

6. Határozzuk meg azt a pozitív x *abszcisszát*, melyre az $y = \frac{1}{x^2}$ görbe alatti terület $T(1, x) = 10$.

$$T(1, x) = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^x = -\frac{1}{x} - (-1) = 1 - \frac{1}{x} = 10.$$

Ilyen pozitív x érték nem létezik. Ez várható is volt; u.i. az $y = \frac{1}{x}$ görbe ordinátája az $x = 1$ helytől jobbra mindig kisebb 1-nél. Így bármekkora x értéknél az $y = \frac{1}{x^2}$ görbe alatti terület az $[1, x]$ szakaszon kisebb 1-nél.

$$T(1, x) = 1 - \frac{1}{x} \to 1, \quad \text{ha} \quad x \to \infty.$$

Ezt így írjuk fel röviden:

$$T(1, \infty) = 1.$$

7. Határozzuk meg az $y = \operatorname{ch} x$ görbe alatti területet a $[0, 1]$ és $[-1, 1]$ intervallumban.

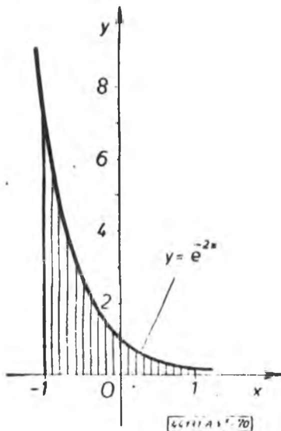
8. Határozzuk meg az $y = x^n$ $(n > 0)$ függvény görbéje alatti területet 0 és 1 között

$$T(0, 1) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} = \frac{\textit{a négyzet területe}}{n+1}.$$

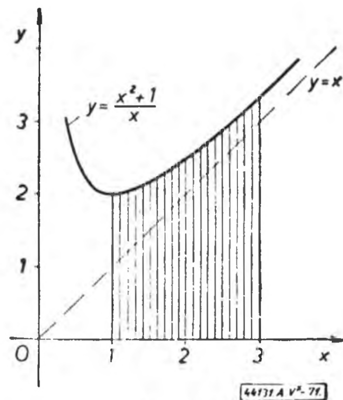
9. Ugyanez a feladat az $y = \frac{1}{1+x^2}$ görbére a $[0, \sqrt{3}]$, $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ és általában a $[-a, a]$ intervallumban.

10. Határozzuk meg az $y = e^{-2x}$ görbe alatti területet a $[-1, +1]$ intervallumban (70. ábra).

Az e^{-2x} egy *primitív* függvénye: $\frac{e^{-2x}}{-2}$.



70. ábra



71. ábra

Így:

$$T(-1, 1) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{+1} = -\frac{1}{2}\left[e^{-2} - e^{2}\right] = \text{sh}\, 2.$$

11. Határozzuk meg az $y = \frac{x^2+1}{x}$ függvény görbéje alatti területet az 1 és 3 abszcisszák között (71. ábra).

Célszerű a törtet felbontani:

$$y = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Ennek már könnyű megtalálni egy *primitív* függvényét:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x.$$

Így:

$$T(1, 3) = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} + \ln 3\right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 1\right) = 4 + \ln 3.$$

12. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ görbe alatti területet a $[\delta, 1]$ intervallumban.

$$T(\delta, 1) = \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int_\delta^1 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_\delta^1 = 2(1 - \sqrt{\delta})$$

$$T(\delta, 1) \to 2, \quad \text{ha} \quad \delta \to 0.$$

Láthatjuk, hogy *bár az* $\frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$, *ha* $x \to 0$, *a görbe alatti terület mérőszáma* mégis *egy meghatározott véges értékhez tart.* E határértéket így jelöljük:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2.$$

13. Mekkora az $xy = 1$ *hiperbola*, az x tengely, az $x = 2$ és $x = 4$ egyenesek közti terület?

14. Mekkora az $y = \ln x$ görbe alatti terület a $[2, 4]$ intervallumban?

15. Mekkora az $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) = a\,\text{ch}\,\frac{x}{2}$ görbe, az x, y tengely és $x = a$ egyenes közötti terület?

16. Mekkora területet határol az x tengely és az $y = 4 - x^2$ *parabola*?

17. Mekkora az $y^2 = 2px$ egyenletű *parabola* alatt terület a $0 \leq x \leq x_1$ szakaszon?

18. $y = b\,\text{ch}\,\frac{x}{a}$; $T(0, x_1) = ?$

19 $y = be^{\frac{x}{a}}$; $T(0, x_1) = ?$; $T(-\infty, 0) = ?$

Határozzuk meg a következő függvények görbéje alatti területet az adott intervallumban:

20. $y = x^3 - 3$, $[3, 4]$
21. $y = \frac{5}{3x^2} + x$, $[1, 3]$
22. $y = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$, $[-1, 1]$
23. $y = \cos\frac{x}{2}$, $[0, \pi]$
24. $y = x - \frac{x^3}{3} + \sqrt{x}$, $[0, 2]$
25. $y = \sin 3x$, $[0, 0{,}3]$
26. $y = \operatorname{ch} 2x$, $[0, 3]$
27. $y = x^3$, $[0, 4]$
28. $y = 9 - x^2$, $[0, 3]$
29. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$, $[-3, 3]$
30. $y = x^2 + x + 1$, $[2, 3]$
31. $y = 2x + \frac{1}{x^2}$, $[1, 4]$
32. $y = \frac{10}{\sqrt{x+4}}$, $[0, 5]$
33. $y = 4x - x^2$, $[1, 3]$
34. $y^2 = 9 - x$, $[0, 8]$
35. $2y^2 = x^3$, $[0, 2]$
36. $y = \sqrt{x-1}$, $[1, 4]$
37. $y = \frac{1}{2x+4}$ $[0, 3]$
38. $y = \cos^2 2x$, $[0, \pi]$

39. Mekkora az $xy = a^2$ görbe $[a, x]$ szakasza alatti terület?

Jelen esetben: $y = \frac{a^2}{x}$. A kérdezett terület:

$$T(a, x) = \int_a^x \frac{a^2}{x}\,dx = a^2[\ln x]_a^x = a^2[\ln x - \ln a] = a^2 \ln\frac{x}{a}.$$

Ha speciálisan $a = 1$, akkor $T(1, x) = \ln x$.

40. Mekkora az $y = x\,e^x$ görbe, az x tengely és az $x = 4$ egyenes közti terület?

Az integráció egyik határa 4, a másik úgy adódik, hogy megkeressük a görbe és az x tengely *metszéspont*ját; ott $x\,e^x = 0$, azaz

$$x = 0,$$

így tehát:

$$T = \int_0^4 x\,e^x\,dx = \left[x\,e^x\right]_0^4 - \int_0^4 e^x\,dx = 4e^4 - (e^4 - 1) = 3e^4 + 1 \approx 164{,}8\,.$$

41. Mekkora az $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ egyenletű *astrois* területe?

$$T = 2b\int_{-a}^{+a}\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} dx. \quad \text{Helyettesítés:} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos t.$$

$$T = -6ab\int_{\pi}^{0} \sin^4 t\cos^2 t\, dt = 12ab\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\, dt\right] = \frac{3ab\,\pi}{8}.$$

Az 1. §. d. β)1. pl. felhasználásával integráltunk.

42. Mekkora az $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ görbe egy kvadránsának területe? $(0 \leq x \leq a)$

$$y = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad T(0, x_1) = \int_0^{x_1}\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\,dx.$$

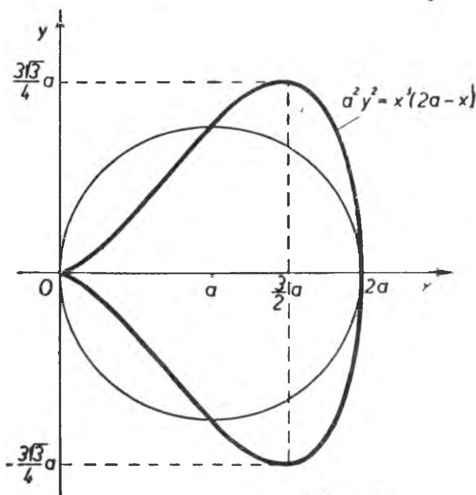
Helyettesítés: $x = a\sin t$.

$$T(0, x_1) = a^2\int_0^{t_1}\cos^2 t\sin t\, dt = \frac{a^2}{3}(1 - \cos^3 t_1) = \frac{a^2}{3}\left(1 - \frac{y_1^3}{x_1^3}\right).$$

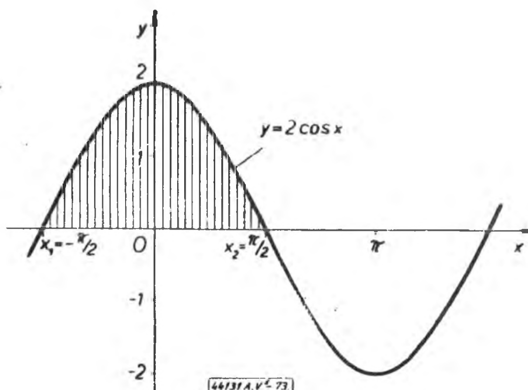
Ha $x_1 = a$ $\left(t_1 = \frac{\pi}{2}\right)$, akkor $T(0, a) = \frac{a^2}{3}$.

43. Mekkora az $a^2y^2 = x^3(2a - x)$ görbe határolta síkrész területe? (72. ábra.)

$$T = 2\int_0^{2a}\sqrt{\frac{x^3(2a - x)}{a^2}}\,dx = \frac{2}{a}\int_0^{2a} x\sqrt{-x^2 + 2ax}\,dx = \frac{2}{a}\int_0^{2a} x\sqrt{a^2 - (x - a)^2}\,dx.$$



72. ábra



73. ábra

Helyettesítés:

$$x - a = a \cos u.$$

$$T = 2a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 u\,(1 + \cos u)\,du = a^2\pi\,.$$

44. Kiszámítandó a következő görbe egy x tengely feletti szakasza, valamint az x tengely által meghatározott terület mérőszáma (73. ábra):

$$y = 2 \cos x.$$

Két egymásutáni *metszéspontja az x-tengellyel:*

$$2 \cos x = 0\text{-ból pl. } x_1 = -\frac{\pi}{2}\,,\quad x_2 = \frac{\pi}{2}\,;$$

ezért:

$$T = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} 2 \cos x\,dx\,,$$

vagy szimmetria-okokból:

$$T = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 4\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4.$$

45. Mekkora az $y^2 = x^2(x^2 - 1)$ görbe, az x tengely és az $x = 2$ egyenes közti terület?

A görbe az x tengelyt az $x^2(x^2 - 1) = 0$ értelmében az $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = +1$ pontokban *metszi.*

A függvény azonban a $-1 < x < 1$ intervallumban nincs *értelmezve* (kivéve a 0 pontot). Ezért az integrálási határok: $x_a = 1$, $x_f = 2$.

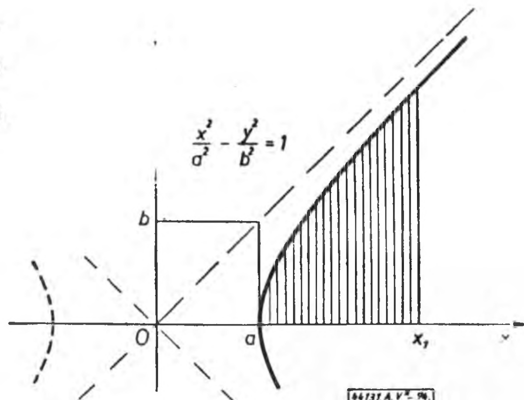
$$T = \int_1^2 x\sqrt{x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{3}\Big[(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2 = \sqrt{3}\,.$$

46. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = \frac{1}{x}$ alatti terület (a, b) és (c, x) szakaszhoz tartozó része egyenlő egyen.

$$T(a, b) = \int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}\,;$$

$$T(c, x) = \int_c^x \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{x}{c}\,.$$

Mivel e kettőnek *egyenlőnek* kell



74. ábra

lennie, így:

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{c}, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{bc}{a}.$$

Mennyi x, ha $c = 2a$, $c = 3a$?

47. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $0 \leq x \leq x_1$, majd $0 \leq x \leq a$. $T(0, x_1) = ?$, $T(0, a) = ?$

48. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \leq x \leq x_1$, $T(a, x_1) = ?$ (74. ábra).

49. Meghatározandó az $y = \ln x$ görbe, az x tengely és az $x = 10$ egyenes közti terület mérőszámának közelítő értéke!

A 44. példa mintájára oldjuk meg az 50—56. feladatokat!

50. $y = 2 \sin \frac{1}{2} \pi x$

51. $y = \cos 2x$

52. $y = \sin \frac{1}{2} x$

53. $y^2 = x^2 (9 - x)$

54. $y^2 = x(x - 2)^2$

55. $y^2 = x^3 - x^2$, az $x = 2$-ig

56. $4y^2 = x^4 (4 - x)$

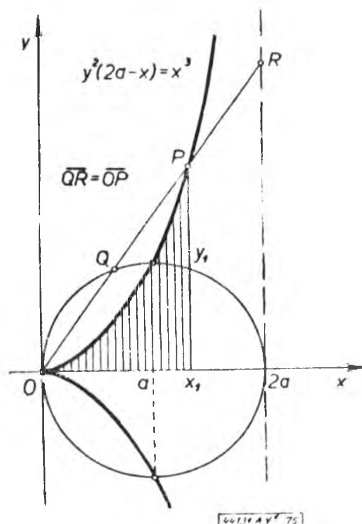
57. $a^2y^2 = x^2 (2ax - x^2)$

$T(0, x_1) = ?$ $T\left|0, \frac{3}{2} a\right| = ?$ $T(0, 2a) = ?$

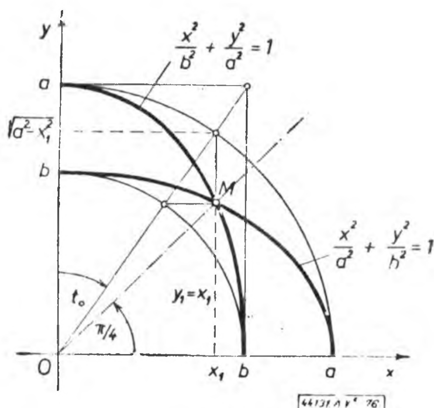
58. $y^2 (2a - x) = x^3$ *cisszoid*;

(75. ábra) $T(0, x_1) = ?$

59. Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy az $y = \frac{1}{1 + x^2}$ görbe alatti terület 0-tól x-ig terjedő szakasza 2,4-del legyen egyenlő. (L. a 46. példát!)



75. ábra



76. ábra

60. Határozzuk meg az x értékét úgy, hogy az $y = e^{-2x}$ görbe alatti terület x-től 1-ig terjedő szakasza 5,4 legyen.

61. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = \sin x$ alatti terület 0-tól x-ig terjedő szakasza $^1/_4$-del legyen egyenlő.

***62.** Mekkora az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ és $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ *ellipszisek* közös területe? $(a > b)$ (76. ábra).

A két görbe *metszéspont*ja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$-ből: $x_{1,2} = y_{1,2} = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

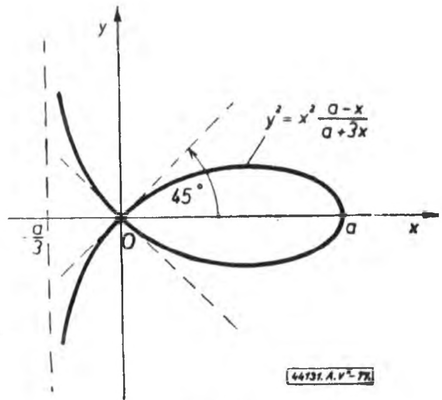
A metszéspont paramétere:

$$t_0 = \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} = \operatorname{arctg} \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 b^2 + a^4 - a^2 b^2}{a^2 + b^2}}} = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Minthogy a 47. példa szerint $T_t = \frac{1}{2}\, ab\, t$, így a kérdezett *közös terület:*

$$T_k = 2 \cdot \frac{1}{2}\, ab\, t_0 = ab \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

63. Mekkora a *Descartes-levél területe* (77. ábra)?



77. ábra

A görbe egyenlete: $y^2 = x^2 \frac{a - x}{a + 3x}$;

$y = 0$, ha $x = a$; $y = \infty$, ha $x = -\frac{a}{3}$;

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{a + 3x}},$$

$$T = 2 \int_0^a x \sqrt{\frac{a - x}{a + 3x}}\, dx.$$

Helyettesítés: $u^2 = a - x$, $x = a - u^2$, $dx = -2u\, du$, $\sqrt{a} \leq u \leq 0$.

$$T = -4 \int_{\sqrt{a}}^{0} (a - u^2) \frac{u^2\, du}{\sqrt{4a - 3u^2}} = \frac{4}{\sqrt{4a}} \int_0^{\sqrt{a}} \frac{(a - u^2) u^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{\sqrt{\frac{4a}{3}}}\right)^2}}\, du.$$

Helyettesítés: $\frac{u}{\sqrt{\frac{4a}{3}}} = v$, $du = \sqrt{\frac{4a}{3}}\, dv$, $0 \leq v \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$T = \frac{2}{\sqrt{a}}\,\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\int\limits^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\left(a - \frac{4a}{3}v^2\right)\frac{4a}{3}v^2}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = \frac{16a^2}{9\sqrt{3}}\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(3-4v^2)v^2}{\sqrt{1-v^2}}\,dv.$$

Helyettesítés: $v = \sin t,\quad t = \arcsin v,\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3},\quad dv = \cos t\,dt.$

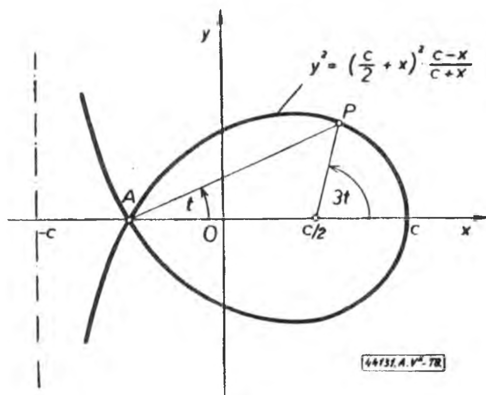
Végül:

$$T = \frac{16a^2}{9\sqrt{3}}\left[3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t\,dt - 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^4 t}{\cos t}\cos t\,dt\right] =$$

$$= \frac{16a^2}{9\sqrt{3}}\left[\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{3}{2}t + \sin^3 t\cos t + \frac{3}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{a^2}{3}.$$

Ugyanekkora a görbe baloldali kettős ága és az $x = -\frac{a}{3}$ aszimptótája közé eső terület!

***64.** $y = \pm\left(\frac{c}{2} + x\right)\sqrt{\frac{c-x}{c+x}}$ *ellipszis evolutája*; $T(x_1, c) = ?$ $T\left(-\frac{c}{2}, c\right) = ?$ $T\left(-c, -\frac{c}{2}\right) = ?$ (78. ábra).



78. ábra

α_4) *Határozzuk meg a következő görbék és az y tengely közötti területet az adott szakaszon.*

65. $y^2 = 4x,\quad 0 \leq y \leq 4.$

Az x-et kifejezve: $x = \frac{y^2}{4}$. Ezzel:

$$T = \int\limits_0^4 \frac{y^2}{4}\,dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{64}{12} = 5\frac{1}{3}.$$

66. $y = 4 - x^2,\quad 0 \leq y \leq 3.$

67. $y^3 = a^2 x,\quad 0 \leq y \leq a.$

68. $xy = 8,\quad 1 \leq y \leq 4.$

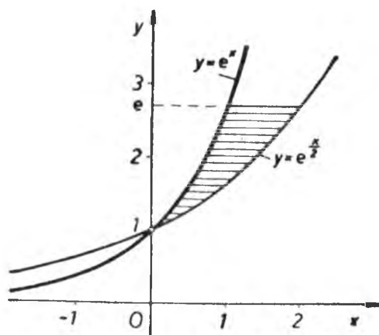
69. Oldjuk meg az előző feladatot az $1 \leq x \leq 4$ szakaszra!

70. $x = a \ln \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}}} - \sqrt{a^2 - y^2}$; *egyenesek traktrixa;* $T(a, y_1) = ?$

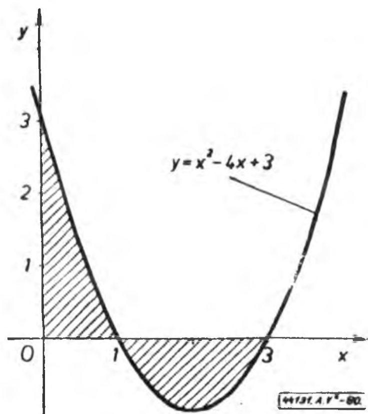
$T(a, 0) = ?$

*71. Meghatározandó az $y = e^{\frac{x}{2}}$ és az $y = e^x$ görbéje közötti terület az y tengely $[1, e]$ szakasza mentén (79. ábra).

β | 1. Mennyi az $y = x^2 - 4x + 3$ függvény görbéje és a tengelyek által körülzárt síkrész geometriai területe (80. ábra)?



79. ábra



80. ábra

$$|T| = \left|\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx\right| + \left|\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1\right| +$$

$$+ \left|\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3\right| = \left|\frac{1}{3} - 2 + 3\right| + \left|(9 - 18 + 9) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right)\right| = \frac{8}{3}.$$

2. Számítsuk ki az $y = (x - 1)^3$ görbe, az $x = 2$ egyenes és a két tengely közötti geometriai területet.

3. Számítsuk ki az $y = \sin x$ görbe, az x tengely, valamint az $x = \dfrac{\pi}{2}$ és $x = \dfrac{5\pi}{3}$ egyenesek közötti geometriai területet.

4. Számítsuk ki az $y = 1 - x^2$ görbe, az x tengely és az $x = 2$ egyenes közötti geometriai területet.

5. Számítsuk ki az $y = x + \sin x$ görbe és az $y - x = 0$ egyenes közötti (origóra szimmetrikus) geometriai területet.

Határozzuk meg a következő görbéknél a geometriai területet az adott szakaszon.

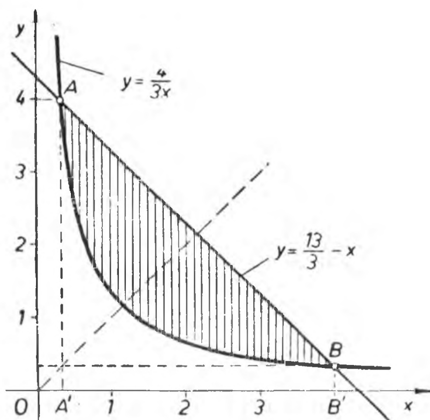
6. $y^2 + 4x = 0$ $[-1, 0]$

7. $y^2 = -4x + 16$ $[-2, 0]$

8. $y = x^2 + 4x$ $[-4, -2]$

γ

1. Határozzuk meg az $y = \frac{4}{3x}$ *hiperbola* és az $y = \frac{13}{3} - x$ *egyenes* közti területet (81. ábra).



81. ábra

Metszéspontjuk:

$$\frac{4}{3x} = \frac{13}{3} - x, \quad 3x^2 - 13x + 4 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 48}}{6},$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 4.$$

Így a közbezárt terület $T = AA'B'B$ trapéz területe — a görbe alatti terület:

$$T = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2}\left(4 - \frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3}\left[\ln x\right]_{\frac{1}{3}}^{4} =$$

$$= 8 - \frac{1}{18} - \frac{4}{3}\left[\ln 4 + \ln 3\right] =$$

$$= 7{,}945 - \frac{4}{3} \ln 12.$$

2. Határozzuk meg az $x + y = 1$ és az $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$ görbék közötti területet.

Először ábrázoljuk az $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$ görbét (82. ábra). A görbe szimmetrikus a szögfelezőre (x és y szerepét felcserélve ugyanahhoz az egyenlethez jutunk). Ha

$$x = 0, \quad y = 1; \quad x = 1, \quad y = 0; \quad x \to \infty, \quad y \to \infty.$$

A közbezárt terület = OAB háromszög területe — a görbe alatti terület.

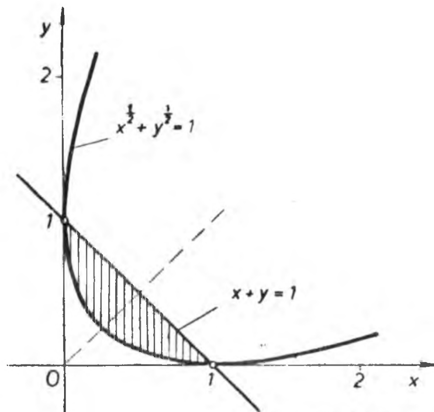
A *háromszög területe*: $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

A *görbe alatti terület* kiszámításánál figyelembe kell venni, hogy az $y = (1 - \sqrt{x})^2$ görbeág zárja be az egyenessel a szóbanforgó területet.

$$y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x.$$

Ennek pedig egyik *primitív* függvénye:

$$F(x) = x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} = x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2.$$



82. ábra

Így a görbe alatti terület:

$$T(0,1) = \left[x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6-8+3}{6} = \frac{1}{6}.$$

A keresett közbezárt terület pedig:

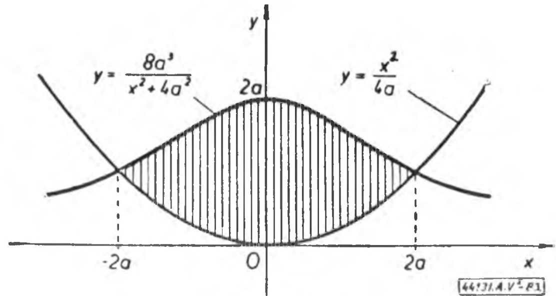
$$T = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. Határozzuk meg a következő görbék közötti területet (83. ábra):

$$y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}, \quad x^2 = 4ay.$$

Metszéspontjaik:

$$A(-2a, a); \quad B(2a, a).$$

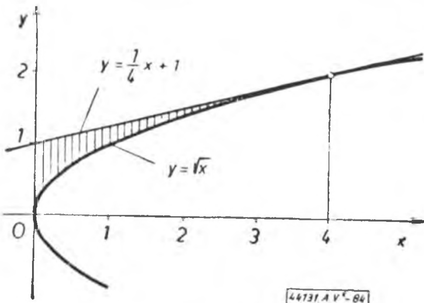


83. ábra

A kérdezett *terület* tehát:

$$T = 2\int_0^{2a}\left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2} - \frac{x^2}{4a}\right)dx = 2\left[4a^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2a} - \frac{x^3}{12a}\right]_0^{2a} =$$

$$= 2\left(4a^2 \operatorname{arctg} 1 - \frac{2}{3}a^2\right) = 2\left(\pi a^2 - \frac{2}{3}a^2\right) = 2a^2\left(\pi - \frac{2}{3}\right).$$



84. ábra

4. Határozzuk meg azt a területet, melyet az y tengely, az $y = \sqrt{x}$ görbe, valamint ennek az $x = 4$ abszcisszájú pontjához húzott érintője zár be (84. ábra).

A kérdéses területet megkapjuk, ha az érintőegyenes alatti területből kivonjuk a görbe alatti területet. Az érintőegyenes iránytangense:

$$m = [y']_{x=4} = \left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]_{x=4} = \frac{1}{4}$$

Az *érintő* [átmegy a (4,2) ponton] egyenlete:

$$y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1.$$

Az érintő alatti terület:

$$T_1 = \int_0^4\left(\frac{1}{4}x + 1\right)dx = \left[\frac{x^2}{8} + x\right]_0^4 = 6.$$

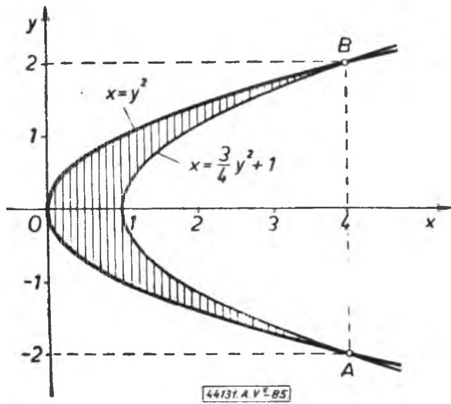
A parabola alatti terület:

$$T_2 = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}.$$

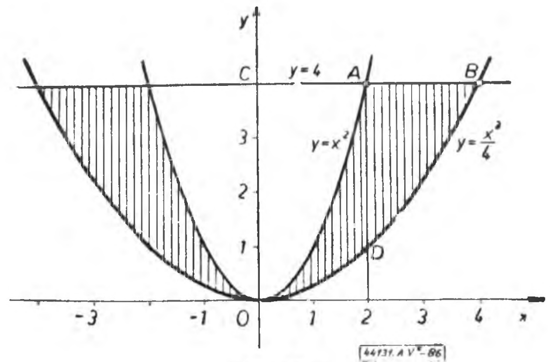
A keresett terület tehát:

$$T = T_1 - T_2 = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}.$$

5. Kiszámítandó az $x = y^2$ és $x = \frac{3}{4}y^2 + 1$ *parabolák* közötti terület (85. ábra).



85. ábra



86. ábra

A két görbe *metszéspontjai*: $A(4, -2)$, $B(4, 2)$. A terület az x tengelyre szimmetrikus, ezért lehet a félterülettel dolgozni. Jelen esetben a számítást úgy hajtjuk végre, hogy a görbék és az y tengely közti területek különbségét vesszük a $0 \leq y \leq 2$ szakaszon.

$$T = 2\int_0^2 \left(\frac{3}{4}y^2 + 1 - y^2\right) dy = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{1}{4}y^2\right) dy = 2\left[y - \frac{y^3}{12}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

6. Kiszámítandó az a terület, melyet az $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ és $y = 4$ görbék határolnak (86. ábra).

Itt is elég szimmetria-okokból a fél területtel számolni. A legegyszerűbb az y tengely és a görbék közötti területet számítani:

$$\frac{T}{2} = OBC - AOC$$

$$T = 2\left(\int_0^4 2\sqrt{y}\,dy - \int_0^4 \sqrt{y}\,dy\right) = 2\int_0^4 \sqrt{y}\,dy = \left[\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{4}{3}4^{\frac{3}{2}} = 10\frac{2}{3}.$$

7. Számítsuk ki ugyanezt a 2. példa gondolatmenetével is!

8. Számítsuk ki az $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ és $y = 3x$ görbék által határolt síkrész területét (87. ábra).

A görbék *metszéspontjai*: $A(0, 0)$; $B(3, 9)$; $C(6, 18)$. (A az x^2 és $\frac{1}{2}x^2$, B az x^2 és $3x$, C a $3x$ és $\frac{1}{2}x^2$ görbék metszéspontját jelenti.)

A keresett területet *részterületek összegeként* állítjuk elő:

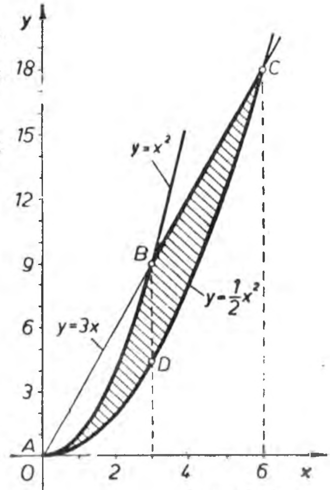
$$(ABCDA)_{ter} = (ABD)_{ter} + (BCD)_{ter}.$$

Így:

$$T = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx + \int_3^6 \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^3 + \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\right]_3^6 =$$

$$= \frac{27}{6} + (54 - 36) - \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{6}\right) = 13\frac{1}{2}.$$



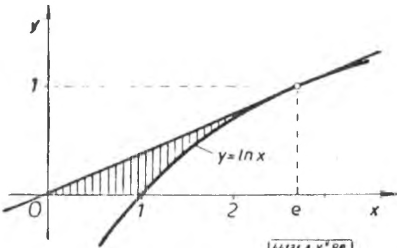
87. ábra

9. Mekkora az $y = x^2$ *parabola* és az $y = x + 6$ *egyenes* közötti terület?

10. Határozzuk meg az $y = \frac{x^2}{3}$ parabola és az $y = 2 + \frac{x}{3}$ egyenes közti területet (*parabola-szelet*).

11. Kiszámítandó az $y = e^x$ és $y = e^{-x}$ görbe, valamint az $x = 1$ egyenes által határolt terület.

12. Kiszámítandó az $y = x$, $x + y = 4$ és $y = 3x$ egyenesek közötti terület.



88. ábra

13. Mekkora az $x + y = 2$ egyenes, az $y = x^3$ görbe és az x tengely közötti terület?

14. Határozzuk meg az $y = x(1 - x)$ *parabola* és ennek az $x = 0$ és $x = 2$ pontjában húzott *érintője* közötti területet.

15. Határozzuk meg az $y = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(x - 4)^2$ *parabola* és ennek az $x = 3$ és $x = 6$ pontjában húzott *érintői* közötti területet.

16. Számítsuk ki annak a görbevonalú trapéznak a területét, melyet az $y = x^2 + 1$ *parabola*, az $x = 4$ *egyenes* és a két koordinátatengely határol.

17. Határozzuk meg az x tengely, az $y = \ln x$ görbe, és ennek az origón átmenő *érintője* közti területet (88. ábra).

18. Határozzuk meg az $y = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(x - 4)^2$ *parabola* és ennek az $x = 3$ és $x = 6$ pontjában húzott *normálisai* közötti területet.

19. Határozzuk meg a 89. ábrán látható $y = \frac{1}{x}$ *hiperbola* bevonalkázott szeletének területét.

20. Kiszámítandó az $x^2 + 4y^2 = 8$ és az $x^2 - 3y^2 = 1$ görbék által közbezárt terület.

21. Számítsuk ki az $y^2 = 2px$ és az $x^2 = 2py$ *parabolák* közötti területet.

89. ábra

22. Kiszámítandó az $y^2 = 2x$ és $y^2 = 4x - x^2$ görbék közötti terület.

Hasonló a feladat a következő görbék esetén:

23. $y = x^3$ és $y = 2x$.

24. $y = 2x + 3$ és $y = x^2$.

25. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 4px$ *kör* és az $y^2 = 2px$ *parabola* közös területét.

26. Határozzuk meg az $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$ és az $y = 1 - x$ görbék közötti területet (numerikusan két tizedesnyi pontossággal).

27. Kiszámítandó azon idom területe, melyet a következő görbék határolnak: $y^2 = 2x$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 3 - \frac{x^2}{2}$.

28. Kiszámítandó az $y = 5x^2$ és $y = x^4 + 4$ görbék közti terület.

*29. Bizonyítsuk be, hogy *az $y = ax^3$ görbe felezi az OPQ háromszög területét,* melyet az x tengely, az $y = \lambda x$ és $x = x_1$ egyenesek alkotnak, ahol x_1 az $y = ax^3$ és $y = \lambda x$ görbék metszéspontjának abszcisszája (90. ábra).

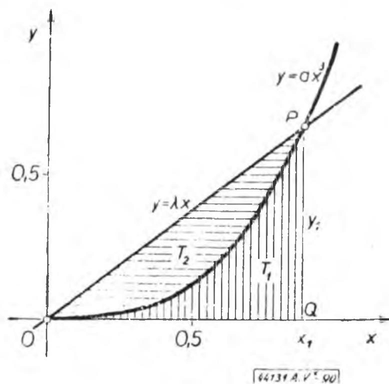
A háromszög területe:

$$T_1 = \int_0^{x_1} \lambda x\, dx = \frac{\lambda x_1^2}{2} = \frac{x_1}{2}\lambda x_1 = \frac{x_1 y_1}{2}.$$

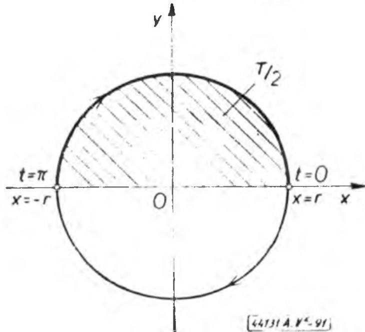
A görbe alatti terület:

$$T_2 = \int_0^{x_1} ax^3\, dx = \frac{a x_1^4}{4} = \frac{x_1}{4} a x_1^3 = \frac{x_1 y_1}{4};$$

azaz valóban: $T_1 = 2T_2$, q. e. d.



90. ábra



91. ábra

δ 1. Számítsuk ki az r sugarú *kör* területét!

A kör paraméteres egyenletrendszere:

$$x = r\cos t,\quad y = r\sin t.$$

Ebből $\dot{x} = -r\sin t$. A félkör területét kétszer véve és figyelemmel az óramutató járásával *egyértelmű* be-

futásra, írhatjuk (91. ábra):

$$T = 2\int_{\pi}^{0} r \sin t\,(-r \sin t)\,dt = \frac{r^2}{2}\,2\int_{0}^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt = r^2\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi} = r^2\pi.$$

2. Számítsuk ki az a és b féltengelyű *ellipszis* területét.

Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a\cos t, \quad y = b \sin t.$$

Ebből $\dot{x} = -a \sin t$, és az előbbi indokolással:

$$T = 2\int_{\pi}^{0} ab\,(-\sin^2 t)\,dt = ab\,\pi.$$

3. $x = \dfrac{a}{\cos t}$, $y = b \sin t$. $T(0, t_1) = ?$

$$T(0, t_1) = a\,b\int_{0}^{t_1}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\sin t\,dt = ab\int_{0}^{t_1}\mathrm{tg}^2\,t\,dt = ab\int_{0}^{t_1}\frac{\cos^2 t + \sin^2 t - \cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$= ab\,[\mathrm{tg}\,t_1 - t_1].$$

4. Mekkora az

$$x = a\cos^3 t, \quad y = b\sin^3 t$$

paraméteres egyenletrendszerű *asztrois* területe?

$$T = \int_{0}^{a} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt = -4\cdot 3ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2 t\sin^4 t\,dt =$$

$$= 12ab\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt\right] = \frac{3ab\pi}{8}.$$

Megjegyzendő, hogy a görbe első negyedét balról jobbra futjuk be, amikor t $\frac{\pi}{2}$-től 0-ig változik.

5. Számítsuk ki az

$$x = 2t - t^2, \quad y = 2t^2 - t^3$$

paraméteres egyenletű görbe alatti területet a $0 \leq t \leq 2$ határok között!

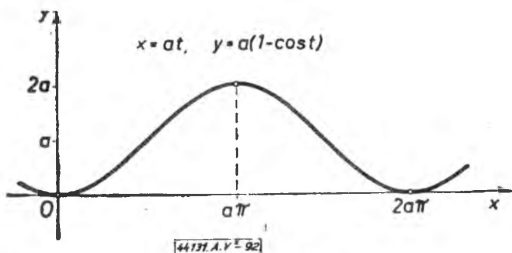
6. Kiszámítandó a *ciklois* egy teljes íve alatti terület. A ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

7. Határozzuk meg az

$$x = a(2\cos t - \cos 2t),\quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe alatti területet, midőn $0 \leq t \leq 2\pi$.



92. ábra

8. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$; $T(0, 2\pi) = ?$

9. $x = at$, $y = a(1 - \cos t)$; $T(0, 2\pi) = ?$ (92. ábra);

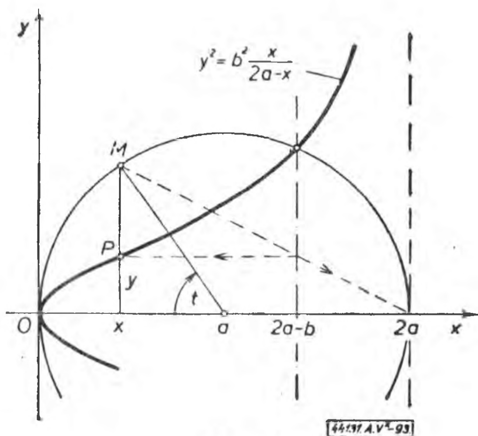
10. $x = t + \cos t$, $y = t \sin t$; $T(0, \pi) = ?$

*11. $y = b\sqrt{\dfrac{x}{2a - x}}$; vagy

$$x = a(1 - \cos t),\quad y = b \operatorname{tg}\frac{t}{2} \quad \text{(93. ábra)}.$$

$T(0, x_1) = ?$ $T(0, 2a) = ?$

$$T\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = ?$$



93. ábra

*12. Meghatározandó az $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ egyenletű *Descartes-levél* hurokjának területe.

A $t = \dfrac{y}{x}$ paramétert bevezetve nyerjük, hogy:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3},\quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

Látható, hogy ha $t \to +\infty$, akkor $y > x \to 0$ (felső félhurok); $t = 1$-nél $x = y = \dfrac{3}{2}a$; végül ha $t \to +0$, akkor $y < x \to 0$ (alsó félhurok).

Ennek megfelelően (a hurok befutása az óramutató járásával *egyező* értelmű lévén) $t_a = +\infty$, $t_f = 0$ (94. ábra).

Így:

$$T = \int_{+\infty}^{0} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt = 9a^2 \int_{+\infty}^{0} \frac{t^2(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^3}\,dt =$$

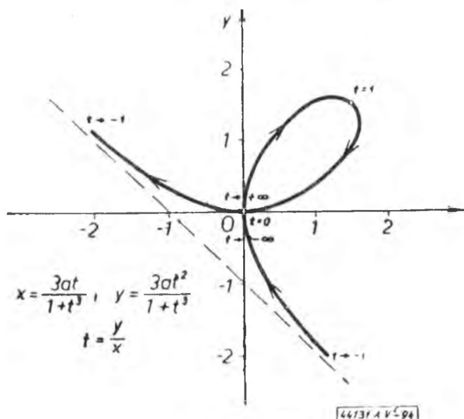
$$= 3a^2 \int_{+\infty}^{0} \frac{3t^2\,dt}{(1 + t^3)^2} - 9a^2 \int_{+\infty}^{0} \frac{3t^2 \cdot t^3\,dt}{(1 + t^3)^3} = 3a^2 \int_{+\infty}^{1} \frac{du}{u^2} - 9a^2 \int_{+\infty}^{1} \frac{u - 1}{u^3}\,du =$$

$$= 3a^2 \left[\frac{2}{u} - \frac{3}{u^2}\right]_{+\infty}^{0} = \frac{3}{2}a^2.$$

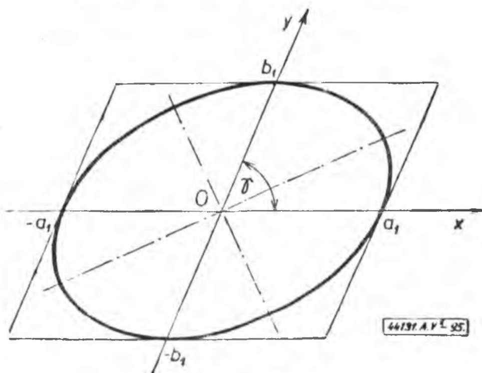
Közben $u = 1 + t^3$ helyettesítéssel éltünk.

ε 1. Meghatározandó azon *ellipszis* területe, amely egy $2a_1$ és $2b_1$ hosszúságú és γ hajlásszögű *konjugált átmérőpár*ral van megadva!

E konjugált átmérőkre, mint ferdeszögű koordinátatengelyekre vonatkozólag, az ellipszis egyenlete (95. ábra):



94. ábra



95. ábra

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1, \quad \text{illetve} \quad y=\pm\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2-x^2},$$

ahol x és y ferdeszögű koordináták. Ezekkel a terület:

$$T=4\sin\gamma\int_0^{a_1}\frac{b_1}{a_1}\sqrt{a_1^2-x^2}\,dx=4b_1\sin\gamma\int_0^{a_1}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a_1}\right)^2}\,dx\,.$$

Helyettesítve: $\frac{x}{a_1}=\sin u$, nyerjük:

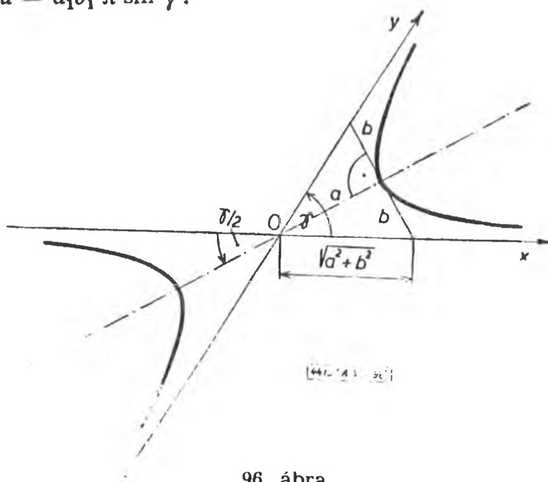
$$T=4b_1a_1\sin\gamma\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du=a_1b_1\pi\sin\gamma\,.$$

2. Egy a és b féltengelyű *hiperbola* egyenlete *aszimptótáira* mint ferdeszögű koordinátatengelyekre vonatkozólag: $xy=\frac{a^2+b^2}{4}$ (96. ábra).

Megállapítandó a görbe alatti terület az $x_0\leq x\leq x_1$ szakaszon. (Itt x és y ferdeszögű koordináták!)

$$T(x_0,x_1)=\sin\gamma\int_{x_0}^{x_1}\frac{a^2+b^2}{4x}\,dx=$$

$$=\sin\gamma\,\frac{a^2+b^2}{4}\ln\frac{x_1}{x_0}\,.$$



96. ábra

Mivel

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{és} \quad \sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 2\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2},$$

így:

$$T(x_0, x_1) = \frac{ab}{2}\ln\frac{x_1}{x_0}.$$

Ha $a = b = \sqrt{2}$, akkor:

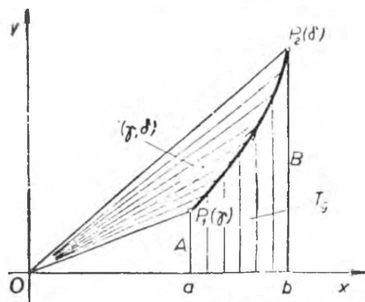
$$T(x_0, x_1) = \ln\frac{x_1}{x_0}.$$

b) Szektorterület számítása

α) Paraméteres megadás

α_1) Vizsgáljuk a derékszögű koordinátarendszerben $x = x(t)$, $y = y(t)$ *paraméteres egyenletrendszerű görbe* $P_1(\gamma)$ *és* $P_2(\delta)$ *pontjai közti darabja és e pontokhoz vont rádiuszvektorok által határolt szektorterület* mérőszámát!

Az $a(\gamma) \leq x(t) \leq b(\delta)$ szakaszon a T_g *görbe alatti terület*, az a) δ) szerint:



97. ábra

$$T_g = \int_a^b y\,dx = \int_\gamma^\delta y(t)\,\dot{x}(t)\,dt.$$

Az utóbbit *parciálisan integrálva*, kapjuk:

$$T_g = \Big[y(t)\,x(t)\Big]_\gamma^\delta - \int_\gamma^\delta \dot{y}(t)\,x(t)\,dt.$$

E két kifejezést összeadva és rendezve:

$$T(\gamma, \delta) = \frac{1}{2}\int_\gamma^\delta [x(t)\,\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\,y(t)]\,dt = \frac{1}{2}bB - \frac{1}{2}aA - T_g.$$

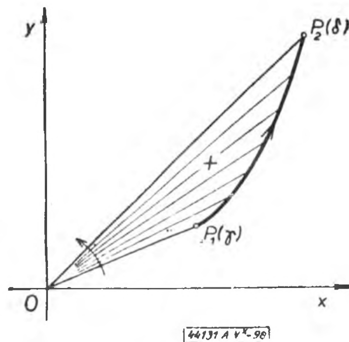
A 97. ábrán rögtön látható, hogy a $T(\gamma, \delta)$ éppen a kérdezett szektorterület mérőszáma.

A (T_g görbe alatti terület segítségével nyert) *Leibniz-féle paraméteres szektorképlet* tehát:

$$\boldsymbol{T(\gamma, \delta) = \frac{1}{2}\int_\gamma^\delta [x(t)\,\dot{y}(t) - \dot{x}(t)\,y(t)]\,dt.}$$

vagy változó felső határú $a(\gamma) \leq x(t) \leq x_1(t_1)$ szakaszra vonatkozólag:

$$T(\gamma, t_1) = \frac{1}{2}\int_\gamma^{t_1} [x(t)\,\dot{y}(t) - y(t)\,\dot{x}(t)]\,dt.$$



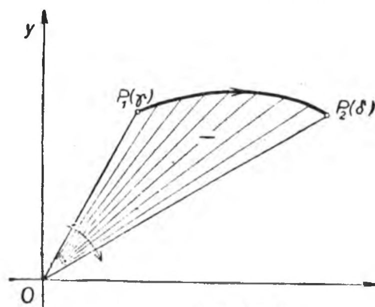
98. ábra

α_2) Kiemelendő, hogy *e képlet is előjeles területi mérőszámot szolgáltat;* mégpedig pozitívat, ha a görbét $P_1(\gamma)$-tól $P_2(\delta)$-ig befutva a rádiuszvektor pozitív értelemben forog, ellenkező esetben negatívot (98. és 99. ábra). [Megkívánjuk, hogy az adott szakaszon $x(t)$, $y(t)$, $\dot{x}(t)$ és $\dot{y}(t)$ legalább részszakaszonként folytonos legyen.]

*α_3) Megjegyzendő, hogy a fent említett $dT = \frac{1}{2}[x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)]$ *területdifferenciál* egyszerűen szemlélhető a vektoriális $\frac{d\boldsymbol{T}}{dt} = \frac{\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}}{2}$ *területsebesség segítségével,* u. i.

$$d\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\,dt = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt\cdot\boldsymbol{k}$$

(Lásd bővebben a B. I. kötetben!)



99. ábra

β) Polárkoordinátarendszerben

β_1) *A görbe $r = r(\varphi)$ poláregyenletét* írjuk át

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$$

paraméteres alakra. Ha $r(\varphi)$ az $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ szakaszon differenciálható, akkor

$$x\dot{y} - \dot{x}y = r\cos\varphi\,(\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi) - r\sin\varphi\,(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi) = r^2.$$

Tehát az $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ szögbeli *szektorterület területi mérőszáma:*

$$\boldsymbol{T}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Ez a polárkoordinátás szektorképlet.

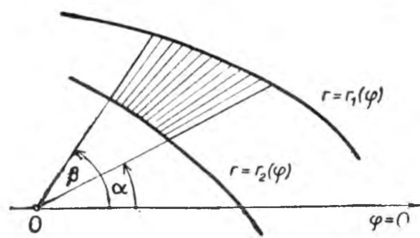
Változó $\alpha \leq \varphi \leq \varphi_1$ szögben:

$$T(\alpha, \varphi_1) = \frac{1}{2}\int_\alpha^{\varphi_1} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

β_2) Megjegyzendő, hogy a

$$dT = \frac{1}{2}r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{r(\varphi)\,d\varphi\cdot r(\varphi)}{2}$$

területdifferenciál úgy jelentkezik, mintha a $[\varphi, \varphi + d\varphi]$ szögben a kezdeti $r(\varphi)$ rádiuszvektor változatlan maradna, vagyis mintha körszektorról lenne szó.

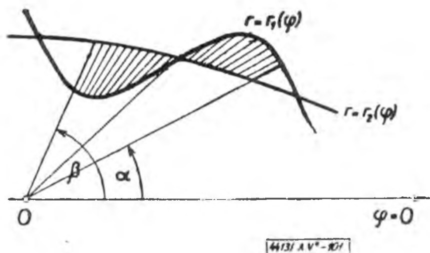


100. ábra

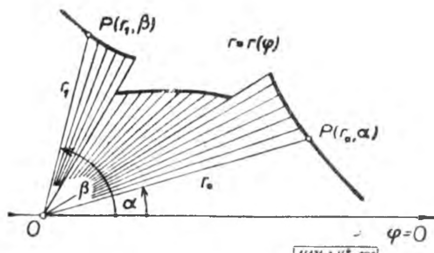
β_3) A területi mérőszám előjele itt is az α_2) szerint adódik. Az α) és β)-beli területképlet a rádiuszvektor által *többször* egyértelemben *súrolt területet* ugyanannyiszor, kétszer különböző értelemben súrolt területet pedig egyszer sem vesz számításba.

β_4) Ha két görbe van adva $r_1 = r_1(\varphi)$ és $r_2 = r_2(\varphi)$ poláregyenletével, továbbá *az* $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$ *szögben* $r_1(\varphi) \geqq r_2(\varphi)$ [de $r_1(\varphi) \not\equiv r_2(\varphi)$], akkor e szögben *a két görbe közti szektorterület* (100. ábra):

$$T(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [r_1^2(\varphi) - r_2^2(\varphi)]\, d\varphi > 0.$$



101. ábra



102. ábra

Ha e szögben *a két görbe metszi egymást*, a megfelelő *részterületeket egyenként* számítjuk (101. ábra). Hasonlóan járunk el, ha az $r = r(\varphi)$ görbe szakadásos (102. ábra).

γ) **Explicit megadás**

Ha *a görbe* $y = f(x)$ *explicit egyenlettel van megadva*, akkor az α)-beli paraméteres *szektorképlet* (az x-et tekintve paraméternek, amikor is $y = f(x)$, $x = x$; továbbá $\dot{y} = f'(x)$, $\dot{x} = 1$) a következő alakot ölti:

$$T(a, b) = \frac{1}{2}\int_{a}^{b} [x\, y'(x) - y(x)]\, dx\, .$$

Aránylag ritkán szerepel!

Példák és feladatok

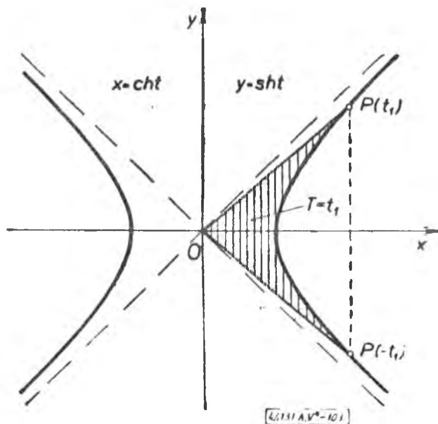
α

1. Mekkora az $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ paraméteres egyenletrendszerű *egyenlőszárú hiperbola* $-t_1 \leqq t \leqq t_1$ szektorának területe (103. ábra)?

Egyenlete: $x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.
Az integrálandó: $x\dot{y} - \dot{x}y = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.
Ezzel:

$$T = \frac{1}{2}\int_{-t_1}^{t_1} 1\, dt = t_1\, ,$$

összhangban azzal, hogy: $t_1 = \operatorname{arch} x_1 = \operatorname{arsh} y_1$.



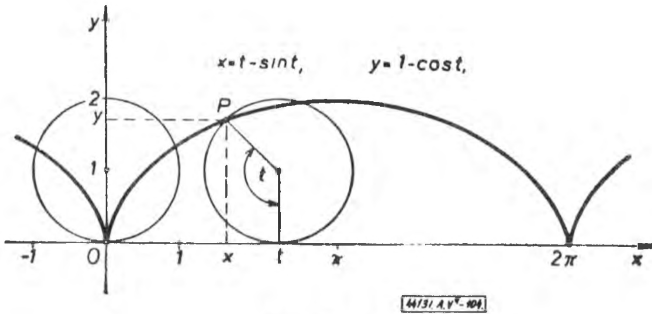
103. ábra

2. Mekkora egy teljes (közönséges) *ciklois* és az x tengely közé eső terület?

Egyenletrendszere:

$$x = b(t - \sin t), \quad y = b(1 - \cos t),$$

hol t a b sugarú *képzőkör* szögelfordulása (l. a 104. ábrát; ott $b = 1$).



104. ábra

$$\dot{x} = b(1 - \cos t), \quad \dot{y} = b \sin t$$

$$x\dot{y} - \dot{x}y = b^2(t - \sin t)\sin t - b^2(1 - \cos t)^2 = b^2 t \sin t - 2b^2(1 - \cos t).$$

A terület:

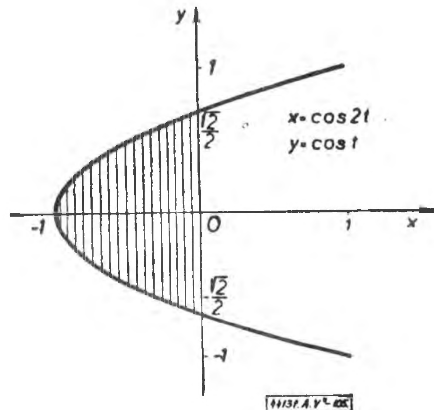
$$T = \frac{b^2}{2}\int_0^{2\pi}[t \sin t - 2 + 2\cos t]\,dt = \frac{b^2}{2}\Big[-t\cos t + \sin t - 2t + 2\sin t\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{b^2}{2}[-2\pi + 0 - 4\pi + 0] = -3b^2\pi,$$

vagyis *a képzőkör területének háromszorosa*. A negatív előjel a rádiuszvektor negatív értelmű (az óramutató járásával egyező) forgása miatt van!

E példát az a) δ)-ban más módon oldottuk meg (6. pl.).

3. Mekkora az $x = \cos 2t$, $y = \cos t$ egyenletrendszerű *parabola* és az y tengely közé eső síkrész területe (105. ábra)? (A parabola explicit egyenlete: $y^2 = \frac{1}{2}(x + 1)$, a t kiküszöbölésével nyerhető.)



105. ábra

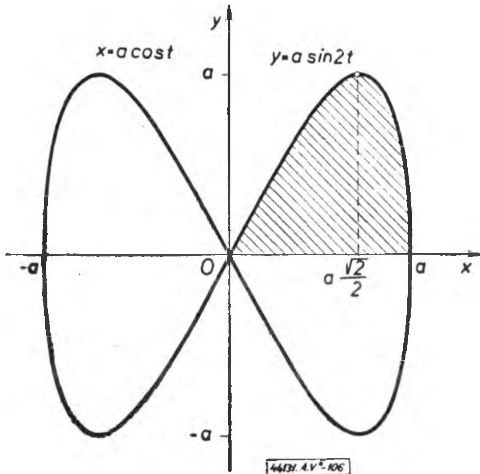
Az integrandus:

$$x\dot{y} - \dot{x}y = -\cos 2t \sin t + 2\sin 2t \cos t.$$

A határok: 2-szer veendő a $t_1 = \frac{\pi}{4}$ $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és a $t_2 = \frac{\pi}{2}$ $(-1, 0)$ közötti terület.

Tehát:

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2t \sin t + 2 \sin 2t \cos t)\, dt =$$



106. ábra

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin t \cos^2 t - \cos^2 t \sin t + \sin^3 t)\, dt.$$

Az integrálást elvégezve nyerjük:

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

4. Határozzuk meg az $x = a \cos t$, $y = a \sin 2t$ paraméteres egyenletrendszerű görbe első negyedének területét (106. ábra)

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2a^2 \cos 2t \cos t + a^2 \sin 2t \sin t)\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt - a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos dt = a^2 - a^2 \int_0^1 u^2\, du = \frac{2}{3} a^2.$$

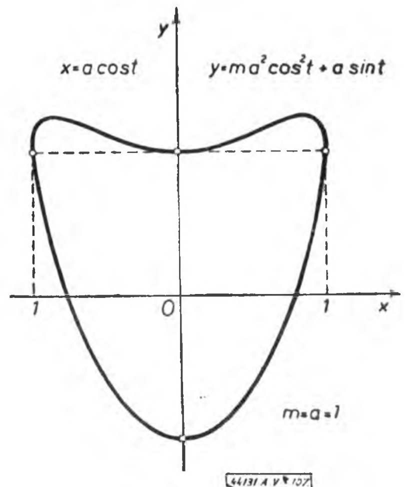
[Felhasználtuk a $\cos(\alpha - \beta)$-ra és a $\sin 2\alpha$-ra vonatkozó azonosságokat.]

5. Határozzuk meg az $x = 1 - \cos^3 t$, $y = 1 - \sin^3 t$ paraméteres egyenletrendszerű görbe $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ szektorának területét.

Mivel a t paraméter $\frac{\pi}{6}$-tól $\frac{\pi}{3}$-ig való növekedése közben a rádiuszvektor forgásiránya az óramutató járásával egyező, a határokat a pozitív eredmény érdekében fordítva vesszük:

$$T = \frac{3}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (-\sin^2 t \cos t + \sin^2 t \cos^4 t +$$

$$+ \cos^2 t \sin^4 t - \cos^2 t \sin t)\, dt =$$



107. ábra

$$= \frac{3}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 t \cos t + \cos^2 t \sin t)\, dt - \frac{3}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t \sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-1}{8} + \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \frac{\pi}{32} = \frac{27\sqrt{3}-8}{64} - \frac{\pi}{32}.$$

6. Kiszámítandó az

$$x = a\cos t, \quad y = m\, a^2 \cos^2 t + a \sin t$$

zárt görbe területe (107. ábra).

Az ismert formula szerint:

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [a\cos t(-ma^2\, 2\cos t \sin t + a\cos t) - (ma^2 \cos^2 t + a \sin t)(-a \sin t)]\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a^2 - ma^3 \sin t \cos^2 t)\, dt = \frac{a^2}{2}\left[t + ma\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = a^2\pi.$$

7. Kiszámítandó a *negyedkör* és a *negyedellipszis* területe.

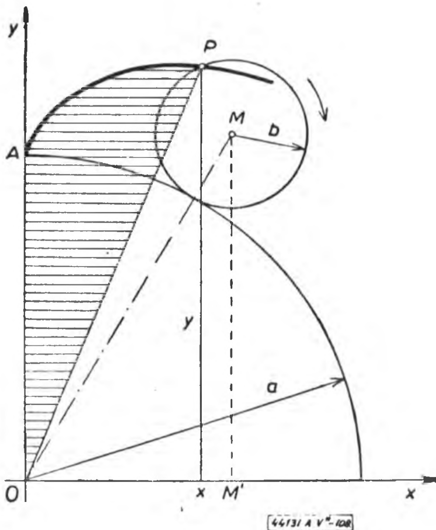
8. Meghatározandó az *asztrois* egy negyedének mint szektornak a területe.

9. $\left.\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\, e^t \end{aligned}\right\}$ $T\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = ?$ $(r = \text{const.})$

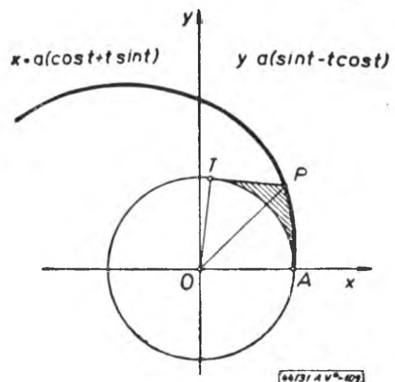
10. $\left.\begin{aligned} x &= a[(1-t^2)\cos t + 2t\sin t - 1] \\ y &= a[(1-t^2)\sin t - 2t\cos t] \end{aligned}\right\}$ $T(0, t_1) = ?$ $(a = \text{const.})$

11. Mekkora az

$$\left.\begin{aligned} x &= (a+b)\cos\frac{bt}{a} - b\cos\frac{(a+b)\,t}{a} \\ y &= (a+b)\sin\frac{bt}{a} - b\sin\frac{(a+b)\,t}{a} \end{aligned}\right\}$$



108. ábra



109. ábra

paraméteres egyenletrendszerű *epiciklois*, valamint az OA ($t = 0$) és $\overline{OP}$ ($t = t_1$) sugár közé eső síkrész területe (108. ábra)?

12. Hasonló feladat oldandó meg *hipociklois* esetén. Az előbbi paraméteres egyenletrendszerben b és t ellenkező előjellel veendő!

*13. Határozzuk meg a 109. ábrán vonalkázott APT síkrész területét. A síkrészt az a sugarú kör és

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

egyenletű *evolvense* határolja.

Itt $P(x_1, y_1)$ a $t = t_1$-nek megfelelő pont a körevolvensen, míg T a P-ből a körhöz vont érintő érintési pontja ($AT = PT$). A keresett terület ily módon:

$$T(0, t_1) = T_1 + T_2 - T_3,$$

ahol T_1 az OAP szektor, T_2 az OPT háromszög és T_3 az OAT körcikk területe.

Mivel

$$\dot{x} = a(-\sin t + t \cos t + \sin t) = at \cos t$$

és

$$\dot{y} = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t,$$

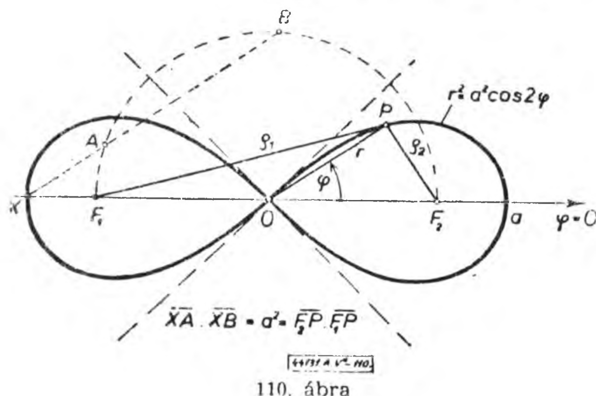
ezért

$$T_1 = \frac{a^2}{2} \int_0^{t_1} [(\cos t + t \sin t) t \sin t - (\sin t - t \cos t) t \cos t] \, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{t_1} t^2 \, dt = \frac{a^2}{2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{t_1} = \frac{a^2 t_1^3}{6}.$$

Továbbá:

$$T_2 = \frac{1}{2} a \widehat{AT} = \frac{1}{2} a^2 t_1; \quad T_3 = a t_1 \frac{a}{2} = \frac{a^2 t_1}{2}.$$



110. ábra

Végül a keresett terület:

$$T(0, t_1) = T_1 + T_2 - T_3 = \frac{a^2 t_1^3}{6}.$$

Figyelemreméltó, hogy $T_2 = T_3$, azaz *az OPT háromszög és OAT körcikk egyenlő területűek*!

β 1. Mekkora az $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ poláregyenletű *lemniszkáta* egyik levelének területe (110. ábra)?

Kétszer veendő a $\varphi_1 = 0$ ($r = a$) és $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ ($r = 0$) közötti szektorterület! Tehát:

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \, d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = a^2 \left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2}.$$

2. Mekkora az $r = 2a(1 + \cos\varphi) = 4a\cos^2\frac{\varphi}{2}$ poláregyenletű *kardioid* területe (111. ábra)?

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|4a\cos^2\frac{\varphi}{2}\right|^2 d\varphi =$$

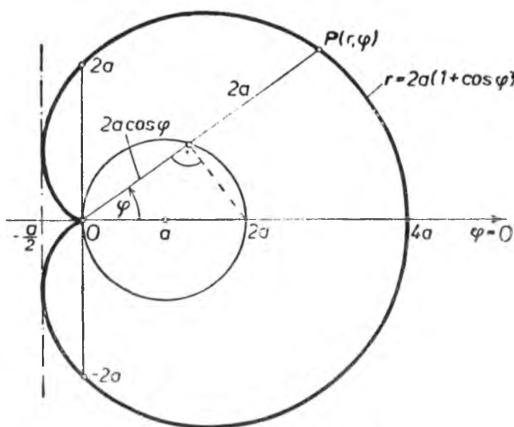
$$= 2\cdot 8a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= 4a^2\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$= 6a^2\pi\,,$$

vagyis éppen *hatszorosa az a sugarú képzőkör területének*.



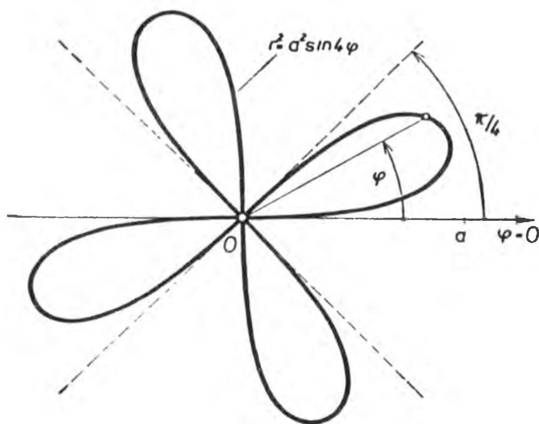
111. ábra

3. Mekkora az előbbi *kardioid* görbe és az *y* tengely közé eső jobboldali síkrész?

Az előbbiek szerint

$$T_j = 4a^2\left[\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = (3\pi + 8)\,a^2\,.$$

4. Mekkora az $r^2 = a^2\sin 4\varphi$ *négylevelű lóhere-görbe* területe (112. ábra)?



112. ábra

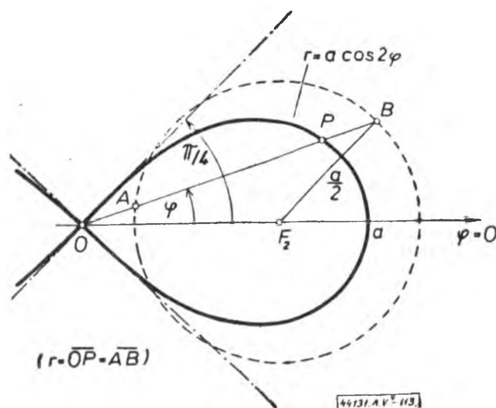
$$T = 4\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 4\varphi\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\left|\frac{\cos 4\varphi}{4}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = a^2\,.$$

(A határokat úgy választottuk, hogy az első levél összes *r*-eit felöleljük!)

5. Mekkora az $r = a\cos 2\varphi$ görbe területe (113. ábra)?

$$T = 2\,\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{a^2\pi}{8}\,.$$



113. ábra

$\left(\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}\right.$ esetén nincs értelmezve, mert r negatív lenne.$\left.\right)$

6. Mekkora az

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

poláregyenletű görbe területe $(0 \leq \varphi \leq \leq 2\pi)$?

$$T = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 2a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + b^2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} =$$

$$= 2b^2 \int_0^{\infty} \frac{du}{a^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 2b^2 \frac{a}{b} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{au}{b}\right]_0^{\infty} = ab\pi.$$

A kapott terület akkora, mint az a és b féltengelyű ellipszisé.

7. Mekkora az $r^2 \cos \varphi = a^2 \sin 3\varphi$ görbe területe, ha $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.

$$T = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \varphi \cos 2\varphi + \sin 2\varphi \cos \varphi}{\cos \varphi} d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \varphi\, (2\cos^2 \varphi - 1)}{\cos \varphi} d\varphi +$$

$$+ \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2\varphi - \operatorname{tg} \varphi + \sin 2\varphi)\, d\varphi = \frac{a^2}{2} \left[\frac{3}{2} - \ln 2\right].$$

8. Határozzuk meg φ_0 értékét úgy, hogy az $r = e^{2\varphi}$ *logaritmikus spirális,* valamint a 0 és φ_0 hajlásszögű rádiuszvektorok közé eső szektor területe 30 területegység legyen.

Alkalmazzuk a megadott formulát egyelőre ismeretlen φ_0 felső határral:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} e^{4\varphi} d\varphi = \frac{1}{8} \left[e^{4\varphi}\right]_0^{\varphi_0} = \frac{1}{8} (e^{4\varphi_0} - 1).$$

E terület az adatok szerint éppen 30 egység. A kérdezett φ_0 tehát az

$$\frac{1}{8} (e^{4\varphi_0} - 1) = 30, \quad e^{4\varphi_0} = 241$$

egyenletből számítható:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4} \ln 241 \approx 1{,}37.$$

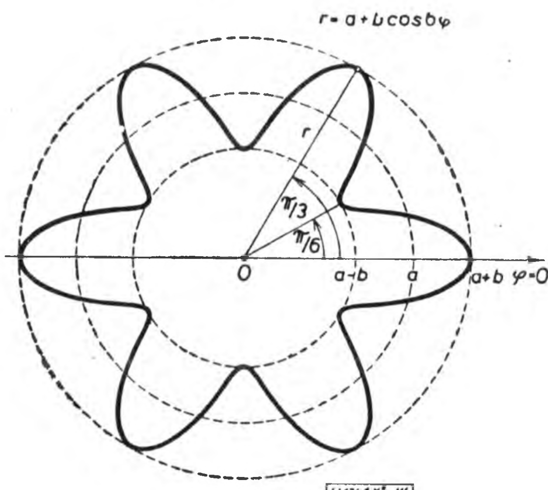
9. Határozzuk meg az $r = a + b \cos n\varphi$ $(a > b)$ poláregyenletű zárt görbe területét (114. ábra $n = 6$ esetén).

Az ismert formulával:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a + b\cos n\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a^2 + 2ab\cos n\varphi + \frac{b^2}{2}(1 + \cos 2n\varphi)\right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2\varphi + \frac{2ab}{n}\sin n\varphi + \frac{b^2\varphi}{2} + \frac{b^2 \sin 2n\varphi}{4n}\right]_0^{2\pi} = a^2\pi + \frac{b^2\pi}{2}.$$

Figyelemreméltó, hogy *az eredmény n-től* (vagyis a levelek számától) *független*. A $b = 0$ esetben a görbe körbe megy át, melynek területe: $a^2\pi$.



114. ábra

10. $r = c\varphi$; *archimedesi spirális*; $T(0, \varphi_1) = ?$ $T(0, 2) = ?$

11. $r = ae^{b\varphi}$; *logaritmikus spirális*; $T(0, \varphi_1) = ?$

12. $r^2 = a^2\varphi$; *parabolikus spirális*; $T(0, \varphi_1) = ?$

13. $r = \frac{1}{\varphi}$; *hiperbolikus spirális*; $T(1, \varphi_1) = ?$ $T(1, \infty) = ?$

14. $r^2 = \frac{a^2}{\varphi}$; *reciprok parabolikus spirális*; $T(1, \varphi_1) = ?$

15. $r = a\cos\varphi + b$; $T(0, \pi) = ?$

16. $r^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$; *ellipszis talppontgörbéje*; $T(0, \varphi_1) = ?$ $T(0, 2\pi) = ?$

17. $r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$; $T\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = ?$

18. $r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$, $0 < \varepsilon < 1$; *ellipszis*; $T = ?$

19. Határozzuk meg φ_0 értékét úgy, hogy az $r = 2\varphi$ *archimedesi spirális* $\varphi = 0$ és $\varphi = \varphi_0$ határok közé eső szektorának területe 20 területegység legyen.

20. Határozzuk meg φ_0 értékét úgy, hogy az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ *lemniszkáta* φ_0 és $\frac{\pi}{4}$ határok közé eső szektorának területe 4 egység legyen.

21. A *körevolvens* poláris-paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} r &= a\sqrt{1+\omega^2} \\ \varphi &= \omega - \operatorname{arc\,tg}\omega \end{aligned}\right\}; \quad T(0, \varphi_1) = ?$$

22. A *kör trajektóriájának* poláris-paraméteres egyenletrendszere:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{a}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \varphi &= \omega - \operatorname{arc\,tg}\omega \end{aligned}\right\}; \quad T(0, \varphi_1) = ?$$

*23. Határozzuk meg az a. δ) 12. pl.-ban említett *Descartes-féle levél* területét polárkoordináták segítségével.

A görbe egyenlete *Descartes-koordinátákkal:*

$$x^3 + y^3 - 3a\,xy = 0.$$

Polárkoordinátákat bevezetve az

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

összefüggések segítségével, nyerjük:

$$r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi - 3ar^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Osztva r^2-tel, majd r-et kifejezve, a görbe polárkoordinátás egyenletéhez jutunk:

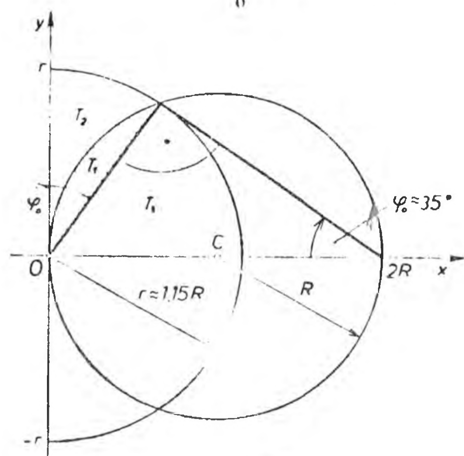
$$r = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

A kérdezett terület ily módon:

$$T = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\,d\varphi = \frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\dfrac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\cos^4\varphi}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}{\left(\dfrac{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}{\cos^3\varphi}\right)^2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{9}{6}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\operatorname{tg}^2\varphi}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\lim_{\Phi\to\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\varphi}\right|_0^{\Phi} = \frac{3}{2}a^2.$$



115. ábra

*24. Adva egy R-sugarú kör. Kérdés, hogy kerületének egy pontjából, mint középpontból milyen sugárral kell kört rajzolni, ha az R-sugarú *kör területének felét* akarjuk vele kimetszeni (115. ábra)?

A vonalkázott (szektorszerű) terület:

$$T_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{(2R \sin \varphi)^2}{\varrho^2} d\varphi = 2R^2 \int_0^{\varphi_0} (1 - \cos 2\varphi)\, d\varphi = R^2 (2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0)\,.$$

Tehát:

$$\frac{R^2 \pi}{2} = T_1 + \frac{(2R \sin \varphi_0)^2 \pi}{2} - T_2 = R^2 (2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0) + 2R^2 \sin^2 \varphi_0 \cdot (\pi - 2\varphi_0)\,.$$

Ebből:

$$2 \sin^2 \varphi_0 \cdot (\pi - 2\varphi_0) + (2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0) = \frac{\pi}{2}\,,$$

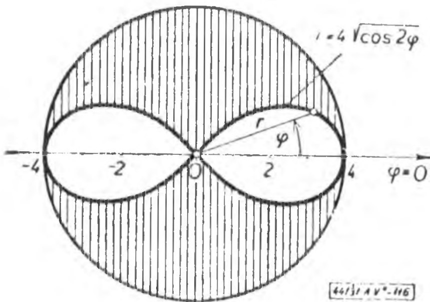
amely *transzcendens* egyenletet *közelítően* megoldva, nyerjük:

$$\varphi_0 \cong 35°, \quad r \cong 2R \sin 35° \cong 1{,}15\, R.$$

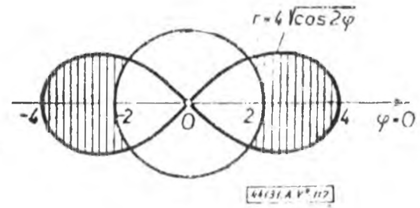
$\beta_4)$ **25.** Határozzuk meg az $r = 4$ *kör* és az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ *lemniszkáta* közé eső területet (116. ábra).

A kör területéből kivonjuk a lemniszkáta területét. Az utóbbi a $\beta)$ 1. feladat szerint: 16. A keresett terület tehát:

$$T = 16(\pi - 1)\,.$$



116. ábra



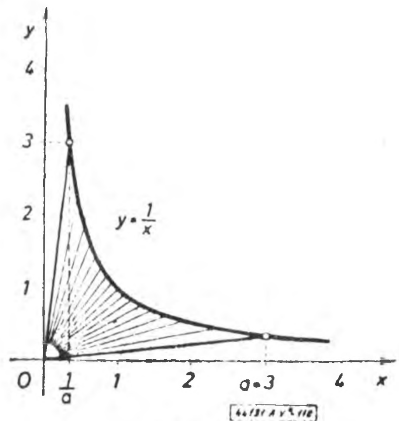
117. ábra

26. Határozzuk meg az $r = 4\sqrt{\cos 2\varphi}$ *lemniszkáta* által határolt területnek az $r = 2$ *körön* kívül eső részét (117. ábra).

$\gamma)$ **1.** Számítsuk ki az $y = \frac{1}{x}$ görbe a és $\frac{1}{a}$ abszcisszájú pontjai közti szakasza, valamint az O-tól e pontokhoz húzott rádiuszvektorok által meghatározott szektorszerű síkrész területét (118. ábra; ott $a = 3$).

A megadott formula alkalmazásával:

$$T = \frac{1}{2} \int_{a}^{\frac{1}{a}} \left| \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x} \right| dx =$$



118. ábra

$$= \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{x}\, dx = \Big[\ln x\Big]_{\frac{1}{a}}^{a} = \ln a - \ln\frac{1}{a} = 2 \ln a.$$

2. Hasonló a feladat az $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ görbére az előbbi adatokkal.

3. Végezzük el az előbbi számítást változatlan adatok mellett az $y = \frac{1}{x^2}$ görbére.

4. Általánosítsuk a feladatot $y = \frac{1}{x^n}$-re $(n > 0)$ a fenti adatok mellett.

4. §. ÍVHOSSZ-SZÁMÍTÁS

α) Ívhossz-differenciál. Alapképlet

α_1) Keressük a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben $y = f(x)$ egyenletű, *folytonos és minden pontjában érintővel rendelkező görbe* $[a, x]$ szakaszmenti darabja $s(a, x)$ ívhossz-mérőszámának, mint az x változó felső határ függvényének *differenciál*ját az $[x, x + dx]$ szakaszon. A 119. ábrán feltüntetett esetben:

$$\overline{MM'} \leq \widehat{MM'} = \Delta s \leq \overline{MT} + \overline{TM'},$$

vagy

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}\,\Delta x \leq \Delta s \leq \sqrt{1 + y'^2}\,\Delta x + \varepsilon.$$

A Δx-szel osztva, majd $\Delta x = dx \to 0$ határátmenetre térve kapjuk:

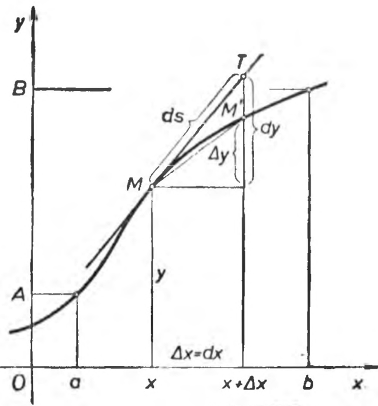
$$\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \leq \frac{\Delta s}{\Delta x} \leq \sqrt{1 + y'^2} + \frac{\varepsilon}{\Delta x},$$

majd

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Innen *az ívhossz-mérő függvény differenciálja:*

$$\boldsymbol{ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx.}$$



119. ábra

α_2) Számolva azzal, hogy az ívhossz rendelkezik az *additivitás* tulajdonságával, az említett egyenletű *görbe* $[a, b]$ *szakaszmenti darabjának ívhossz-mérőszáma:*

$$\boldsymbol{s(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx}, \quad a < b;$$

vagy az $[a, x_1]$ szakaszra vonatkozólag:

$$s(a, x_1) = \int_a^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

α_3) Ha előnyösebb az $y = f(x)$ függvény $x = \varphi(y)$ inverzével dolgozni, akkor az

$$s(A, B) = \int_A^B \sqrt{1 + x'^2(y)}\, dy$$

képletet használjuk, ahol $A = f(a)$, $B = f(b)$.

α_4) *Ha* az $[a, b]$ szakaszon *az* $y = f(x)$ *függvény differenciálható és* $\dot{y} = f'(x)$ *deriváltja* ott *részszakaszonként folytonos* (az ilyen görbéket *részszakaszonként sima görbék*nek nevezzük), *akkor* az $\sqrt{1 + \dot{y}^2(x)}$ ott *Riemann* értelmében integrálható, azaz a mondott szakaszon *a görbe mérhető ívhosszú*, idegen szóval *rektifikálható*.

*α_5) Megjegyzendő, hogy ugyanezen formulákhoz jutunk — bár bonyodalmasabb úton — akkor is, ha az ívhossz differenciálja és additivitása helyett *a görbe ívhosszának általános definíciójá*val dolgozunk.

E definíció szerint *egy görbe ívhosszának nevezzük azt a határértéket, amelyhez a beírt (vagy akár a köréírt) töröttvonal hossza* ***tart, ha*** *oldalainak számát minden határon túl növeljük, miközben közülük a legnagyobb is a zérushoz tart.* Betűkkel (beírt töröttvonalra):*

$$s(a, b) = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + y'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx\,,$$

ahol ξ_i a Δx_i részszakaszon a *Lagrange*-féle **középértékhely**.

E definíció szerint *nem minden görbe mérhető*, rektifikálható. Megesik, hogy a görbe teljes terjedelmében a sík egy véges részén helyezkedik el, még sincs (véges) ívhossza.

α_6) Az ívhossz differenciáljának olyan alakot is adhatunk, amely *nem tételezi fel a független (integrálási) változó előzetes megválasztását*. Alakja derékszögű koordinátarendszerben:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

geometriai értelme a 119. ábrán szemlélhető.

E differenciállal az $\overset{\frown}{AB}$ *görbedarab ívhossza:*

$$s(A, B) = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2 + dy^2}\, dx.$$

β) Paraméteres megadás

Az előbbi formula alapján, az $x = x(t)$, $y = y(t)$ paraméteres egyenletrendszerű görbe $P_1(\gamma)$ és $P_2(\delta)$ közti darabjának ívhosszmérőszáma:

$$s(\gamma, \delta) = \int_\gamma^\delta \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt, \quad \gamma < \delta\,.$$

* Lásd precízebben pl. *Bermant* i. m. I. k., 392. o.

γ) Polárkoordinátás megadás

γ_1) Ekkor a fentebb derékszögű koordinátarendszerben felírt általános *differenciál*-alak:

$$ds = \sqrt{dr^2 + (r\,d\varphi)^2}\,.$$

Ezzel $r = r(\varphi)$ megadás esetén a görbe $[\alpha, \beta]$ szögbeli darabjának *ívhossza:*

$$s(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\,d\varphi, \quad \alpha < \beta.$$

γ_2) A $\varphi = \varphi(r)$ megadás esetén a görbe ϱ és R rádiuszvektorok közé eső darabja:

$$s(\varrho, R) = \int_\varrho^R \sqrt{1 + r^2\dot{\varphi}^2(r)}\,dr, \quad \varrho < R.$$

γ_3) Ha a görbe polárkoordinátái $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ módon egy t *paraméter függvényében* vannak megadva, akkor a dr-et, $d\varphi$-t, az integrál határait és az integrálandót t-vel kell kifejezni.

γ_4) A β) és γ) esetekben szintén megkívánjuk, hogy az adott szakaszon *a görbe legalább részszakaszonként sima*, vagyis az integrálandó legalább részszakaszonként folytonos legyen.

δ) Gyakorlati megjegyzések

Az ívhossz-számítás — ez az összes ívhosszképleteknél megfigyelhető — *irracionális függvények integrálását kívánja.* Ez — a legegyszerűbb esetektől eltekintve — *általában nem könnyű* feladat. (L. az A. IV. kt. 5. §-át!) Az integrálandó folytonossági (rész)-szakaszain létezik ugyan primitív függvény, de ez akárhányszor nem adható meg elemi függvényekkel, zárt alakban, más szóval az integrálás nem végezhető el elemi úton.

Példák és feladatok

α | 1. Meghatározandó az $y = \operatorname{ch} x$ *láncgörbe* ívhossza az $a \leq x \leq b$ szakaszon.

Itt: $y' = \operatorname{sh} x$. Ezzel:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int_a^b \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a.$$

2. Mekkora az $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *asztrois* teljes ívhossza (4 ág ívhossza)?

Itt:

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right).$$

Tehát:

$$s = 4\int_0^a \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)}\,dx = 4\int_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx = 4\cdot\frac{3}{2}a = 6a\,.$$

3. Mekkora a $9ay^2 = x(x-3a)^2$ görbe ívhossza a $0 \leq x \leq a$ szakaszon? Itt:

$$y = \frac{x-3a}{3}\sqrt{\frac{x}{a}}; \quad y' = \frac{x-a}{2\sqrt{ax}}.$$

Tehát:

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{2a}}\,dx = \int_0^a \frac{x+a}{2\sqrt{ax}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^a \left(x^{\frac{1}{2}} + ax^{-\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2ax^{\frac{1}{2}}\right]_0^a = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{3}a^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}a.$$

4. Meghatározandó az $y = \frac{x^2}{2p}$ *parabola* ívhossza a $0 \leq x \leq x_1$ szakaszon.

Itt: $y' = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$. Tehát:

$$s = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{p}\right)^2}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^{x_1} \sqrt{p^2 + x^2}\,dx.$$

Helyettesítés:

$$\frac{x}{p} = \operatorname{sh} u, \quad dx = p \operatorname{ch} u\, du, \quad u = \operatorname{arsh}\frac{x}{p}, \quad 0 \leq u \leq u_1 = \operatorname{arsh}\frac{x_1}{p}.$$

Ezzel:

$$s = p\int_0^{u_1} \operatorname{ch}^2 u\, du = \frac{p}{2}\int_0^{u_1} (\operatorname{ch} 2u + 1)\, du = \frac{p}{2}\left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2} + u\right]_{u=0}^{u=\operatorname{arsh}\frac{x_1}{p}}$$

A határokat behelyettesítve és átalakítást eszközölve nyerjük végül:

$$s = \frac{p}{2}\left[\frac{\operatorname{sh} 2 \operatorname{arsh}\frac{x_1}{p}}{2} + \operatorname{arsh}\frac{x_1}{p}\right] = \frac{p}{2}\operatorname{sh}\left(\operatorname{arsh}\frac{x_1}{p}\right)\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\left(\operatorname{arsh}\frac{x_1}{p}\right)} +$$

$$+ \frac{p}{2}\ln\left(\frac{x_1}{p} + \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{p^2}}\right) = \frac{p}{2}\left[\frac{x_1}{p}\sqrt{1 + \frac{x_1^2}{p^2}} + \ln\left(\frac{x_1}{p} + \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{p^2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{x_1}{2p}\sqrt{p^2 + x_1^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{x_1 + \sqrt{p^2 + x_1^2}}{p}.$$

5. $y = x^{\frac{3}{2}}$ $\qquad s(0, 4) = ?$

6. $y = \frac{x^3}{6a^2} + \frac{a^2}{2x}$ $\qquad s(a, x_1) = ?$

7. $y = \ln \cos x \qquad s(0, a) = ? \quad \left(a < \frac{\pi}{2}\right)$

8. $y = \ln \frac{1}{\sin x} \qquad s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) = ?$

9. $y = \ln (1 - x^2) \qquad s\left(0, \frac{1}{2}\right) = ?$

10. $y = \ln x \qquad s(\sqrt{3}, \sqrt{8}) = ?$

11. $y = \frac{x - 3a}{3} \sqrt{\frac{x}{a}} \qquad s(0, x_1) = ?$

12. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad s(0, b) = ?$

13. $y = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - 1} - \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})\right] \qquad s(1, a + 1) = ?$

14. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$ görbe kerülete $= ?$

15. $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$ görbe kerülete $= ?$

16. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ egy negyedének ívhossza $= ?$

17. $x = \frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{2} \ln y \qquad s(1, e) = ?$

18. $y = e^x \qquad s(0, x_0) = ?$

19. $e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \qquad s(a, b) = ?$

20. $y = \frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{\frac{x^4}{a}} - 2\sqrt[3]{ax^2}\right] \qquad s(0, x_1) = ? \quad s(0, a) = ?$

21. $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2} \qquad s(0, x_1) = ?$

22. $y = 2a \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - 4\sqrt{ax} \qquad s(0, x_1) = ?$

23. Mekkora a $9b^4x^2 = 4(y^2 - b^2)^3$ görbe ívhossza az y tengellyel való metszéspontjától számítva?

Itt célszerűbb az y-t tekinteni független változónak:

$$x = \frac{2}{3b^2}(y^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Így a kérdezett ívhossz:

$$s_1 = \frac{2}{3}\frac{y_1^3}{b^2} - y_1 + \frac{1}{3}b;$$

az x-tengellyel való metszéspontig pedig:

$$s_0 = \frac{b}{3}.$$

24. Határozzuk meg x_0 értékét úgy, hogy az $y = \operatorname{ch} x$ görbe 0-tól x_0-ig terjedő ívének hossza 15 hosszegység legyen.

25. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = x^{\frac{3}{2}}$ görbe 0-tól x_0-ig terjedő ívének hossza 12 hosszegység legyen.

***26.** Mekkora az $y = \sqrt{\frac{x^3}{b-x}}$ *cisszoid* (b a képző kör átmérője) ívhossza, ha $0 \leq x \leq x_1$?

$$s = \int_0^{x_1} \frac{b}{2(b-x)} \sqrt{\frac{4b-3x}{b-x}}\, dx; \quad u^2 = \frac{4b-3x}{b-x} \text{ helyettesítéssel:}$$

$$s_1 = b\left\{\sqrt{\frac{4b-3x_1}{b-x_1}} - 2 - \sqrt{3}\ln\left[\frac{\sqrt{4b-3x_1} + \sqrt{3(b-x_1)}}{(2+\sqrt{3})\sqrt{b}}\right]\right\}$$

***27.** Meghatározandó a $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ *differenciálegyenlettel adott görbesereg* egyik görbéjének ívhossza, ha $0 \leq x \leq r$.

A differenciálegyenlet és megoldása:

$$y\,dy + x\,dx = 0, \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

A kérdezett ívhossz:

$$s = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\, dx = \int_0^r \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}\, dx = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= r\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_0^r = \frac{r\pi}{2}, \quad \text{mely egy } \textit{negyed körív}.$$

***28.** $y = \ln \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ $\qquad s(x_1, x_2) = ?$

Először bontsuk szét a függvényt:

$$y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \ln\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

A derivált és az integrálandó:

$$y' = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin x \cos x}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{\sin^2 x \cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + \sin x \cos x)^2}}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} + 1.$$

Végül a kérdezett ívhossz:

$$s(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \left(1 + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) dx = \Big[x + \ln \operatorname{tg} x\Big]_{x_1}^{x_2} = x_2 - x_1 + \ln \frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1}.$$

β | 1. Mekkora az $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ paraméteres egyenletrendszerű *közönséges ciklois* egy egész ívének ívhossza?

Ekkor:

$$\dot{x} = r(1 - \cos t), \quad \dot{y} = r \sin t; \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\, 2(1 - \cos t) = 4r^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Tehát:

$$s = 2r \int_0^t \sin \frac{t}{2}\, dt = 4r \Big[\cos \frac{t}{2}\Big]_t^0 = 4r \Big[1 - \cos \frac{t}{2}\Big].$$

Következésképpen egy egész cikloisív hossza:

$$s = 2r \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = 4r\,(1 - \cos \pi) = 8r,$$

vagyis a *képző kör sugarának 8-szorosa.*

2. Mekkora az $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ paraméteres egyenletrendszerű *asztrois* egész ívhossza?

Itt:

$$\dot{x} = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t; \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t \cdot 1.$$

Így a zárt görbe ívhossza:

$$s = 4 \cdot 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt = 3a \Big[\cos 2t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^0 = 6a.$$

Egy ívdarab hossza, ha $0 \leqq t \leqq t_1$:

$$s = \frac{3}{2} a \sin^2 t_1 = \sqrt[3]{a y_1^2}.$$

3. Számítsuk ki az

$$x = \cos 2t, \quad y = \sin t$$

görbe ívhosszát, ha $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$.

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t + 4 \sin^2 2t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t + 4 \cdot 4 \sin^2 t \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sqrt{1 + 16 \sin^2 t}\, dt.$$

A $\sin t = u$, majd $u = \frac{1}{4} \operatorname{sh} v$ helyettesítéssel nyerjük:

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\,(1 + 16 \sin^2 t)}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 16u^2}\, du =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\operatorname{arsh} 4} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 v} \operatorname{ch} v\, dv = \frac{1}{4} \int_0^{\operatorname{arsh} 4} \frac{1 + \operatorname{ch} 2v}{2}\, dv =$$

$$= \frac{\operatorname{arsh} 4}{8} + \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} 4) \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} 4)}{8} = \frac{\operatorname{arsh} 4}{8} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16} =$$

$$= \frac{1}{8} \ln (4 + \sqrt{17}) + \frac{1}{2}\sqrt{17}.$$

4. Határozzuk meg az

$$x = \cos t, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{8} \sin 2t$$

görbe teljes kerületét!

$$\dot{x} = -\sin t, \quad \dot{y} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2t;$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \sin^2 t + \frac{1}{8} \cos^2 2t;$$

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2t + \frac{1}{4}\cos^2 2t}{2}}.$$

$$s(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2t\right)^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[t - \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi\sqrt{2}.$$

5. *Epiciklois:*

$$x = (a + r)\cos t - r\cos\frac{a + r}{r}t,$$

$$y = (a + r)\sin t - r\sin\frac{a + r}{r}t.$$

$$\dot{x} = -(a + r)\left(\sin t - \sin\frac{a + r}{r}t\right), \quad \dot{y} = (a + r)\left(\cos t - \cos\frac{a + r}{r}t\right);$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(a + r)^2 - 2(a + r)^2\left(\sin t \sin\frac{a + r}{r}t + \cos t\cos\frac{a + r}{r}t\right) =$$

$$= 2(a + r)^2\left(1 - \cos\frac{a}{r}t\right) = 4(a + r)^2\sin^2\frac{a}{2r}t.$$

$$s_1 = 2(a + r)\int_0^{t_1}\sin\frac{a}{2r}t\,dt = \frac{4r}{a}(a + r)\left[-\cos\frac{a}{2r}t\right]_0^{t_1} =$$

$$= \frac{4r}{a}(a + r)\left(1 - \cos\frac{a}{2r}t_1\right) = \frac{8r}{a}(a + r)\sin^2\frac{a}{4r}t_1.$$

A t szög kapcsolata a gördülő kör n elfordulási szögével:

$$at = rn; \quad \text{ha } n = 2\pi, \text{ akkor } t_0 = \frac{2r\pi}{a}.$$

Egy epiciklois-ág ívhossza ($0 \leq t \leq t_0$):

$$s = \left[\frac{8r}{a}(a + r)\sin^2\frac{a}{4r}t\right]_0^{t} = \frac{8r}{a}(a + r);$$

ha pedig $a = rn$, akkor:

$$s = 8r\frac{n + 1}{n}.$$

Az egész (n-ágú) *epiciklois-ív* hossza tehát:

$$S = ns = 8r(n + 1).$$

Az $n = 1$ esetben a görbe *kardioid*ba megy át; egész ívhossza:

$$S = 16r.$$

6. *Hipociklois:*

$$x=(a-r)\cos t+r\cos\frac{a-r}{r}t,$$

$$y=(a-r)\sin t-r\sin\frac{a-r}{r}t.$$

Mint előbb!

$$s_1=\frac{8r}{a}(a-r)\sin^2\frac{a}{4r}t_1.$$

és $t_0=\frac{2r\pi}{a}$-val egy hipociklois-ág ívhossza:

$$s=\frac{8r}{a}(a-r).$$

7. $x=\frac{1}{2}t^2,\quad y=\frac{4}{3}\sqrt{(t+1)^3};\quad s(0,1)=?\quad s(0,t_1)=?$

8. $\left.\begin{aligned}x&=e^t\sin t\\ y&=e^t\cos t\end{aligned}\right\}\quad s\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=?$

9. $\left.\begin{aligned}x&=e^t(\cos t-\sin t)\\ y&=e^t(\cos t+\sin t)\end{aligned}\right\}\quad s(a,b)=?$

10. $\left.\begin{aligned}x&=t^2\\ y&=1-t\end{aligned}\right\}\quad s(0,a)=?$

11. $\left.\begin{aligned}x&=t^2\\ y&=t^3\end{aligned}\right\}\quad s(0,t_1)=?$

12. $x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t);\quad s(0,t_1)=?$

13. $\left.\begin{aligned}x&=(t^2-2)\sin t+2t\cos t\\ y&=(2-t^2)\cos t+2t\sin t\end{aligned}\right\}\quad s(0,\pi)=?$

14. $\left.\begin{aligned}x&=a\cos^5 t\\ y&=a\sin^5 t\end{aligned}\right\}$ kerülete = ?

15. $\left.\begin{aligned}x&=a\left[\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right]\\ y&=a\sin t\end{aligned}\right\}$ *traktrix:* $s\left(\frac{\pi}{2},\ t_1\right)=?$

16. $x=\frac{1}{2}\operatorname{sh}t,\quad y=2\sqrt{2}\operatorname{sh}\frac{t}{2};\quad s(0,\ln a)=?$

17. $\left.\begin{aligned}x&=a\sin t-\frac{a-b}{3}\sin^3 t\\ y&=b\cos t-\frac{a-b}{3}\cos^3 t\end{aligned}\right\}\quad s(0,t_1)=?\quad s(0,2\pi)=?$

18. $\left.\begin{aligned}x&=a\sin t-\frac{1}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\sin^3 t\\ y&=b\cos t-\frac{1}{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\cos^3 t\end{aligned}\right\}\quad s(0,t_1)=?\quad s(0,2\pi)=?$

19. $\left.\begin{aligned}x&=a\,[(1-t^2)\cos t+2t\sin t-1]\\ y&=b\,[(1-t^2)\sin t-2t\cos t]\end{aligned}\right\}$ az origóból kiinduló *spirális;* $s(0,t_1)=?$

20. $\left.\begin{array}{l} x = t \sin t \\ y = t \cos t \end{array}\right\}$ $s(0, t_1) = ?$

21. $\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{arch} t \\ y = \operatorname{arsh} t \end{array}\right\}$ $s(t_1, t_2) = ?$

22. $x = t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad y = 2 \operatorname{ch} t; \quad s(0, t_1) = ?$

Esetünkben:

$$\dot{x} = 1 - \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = -2 \operatorname{sh}^2 t, \quad \dot{y} = 2 \operatorname{sh} t;$$

továbbá

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{4 \operatorname{sh}^4 t + 4 \operatorname{sh}^2 t} = 2 \operatorname{sh} t \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \operatorname{sh} 2t.$$

Ezekkel:

$$s(0, t_1) = \int_0^{t_1} \operatorname{sh} 2t\, dt = \left[\frac{\operatorname{ch} 2t}{2}\right]_0^{t_1} = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 2t_1 - 1)\,.$$

γ) 1. Mekkora az $r = e^{a\varphi}$ *logaritmikus spirális* ívhossza, ha $0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1$.

Itt $\dot{r} = ae^{a\varphi}$, $r^2 + \dot{r}^2 = e^{2a\varphi}(1 + a^2)$. Így:

$$s = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 + a^2}\, e^{a\varphi}\, d\varphi = \frac{e^{a\varphi_1} - 1}{a} \sqrt{a^2 + 1}.$$

Ha $\varphi_1 = -\infty$ (az aszimptotikus pontig):

$$s = (-)\, \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}\,.$$

2. $r = a(\varphi^2 - 1); \quad 0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1; \quad -1 \leqq \varphi \leqq +1$ (zárt görbe).

Itt $r^2 + \dot{r}^2 = a^2 (\varphi^2 + 1)^2$. így:

$$s = a \int_0^{\varphi_1} (\varphi^2 + 1)\, d\varphi = a\left(\varphi_1 + \frac{\varphi_1^3}{3}\right).$$

Továbbá:

$$s(-1, 1) = \int_{-1}^{+1} (\varphi^2 + 1)\, d\varphi = a\left[\varphi + \frac{\varphi^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{8a}{3}\,.$$

3. *Kardioid:* $r = 2a(1 + \cos\varphi)\,;\; 0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1\,;\; \dot{r} = -2a \sin\varphi$.

$$s = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{4a^2 (1 + \cos\varphi)^2 + 4a^2 \sin^2\varphi}\; d\varphi = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{8a^2(1 + \cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\varphi_1} \sqrt{16a^2 \cos^2 \varphi/2}\; d\varphi = 4a \int_0^{\varphi_1} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a \sin\frac{\varphi_1}{2}\,.$$

4. *Archimedesi spirális:* $r = a\varphi$; $0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1$; $\dot{r} = a$.

$$s = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi.$$

Helyettesítés:

$$\varphi = \operatorname{sh} t, \quad d\varphi = \operatorname{ch} t\, dt, \quad t = \operatorname{arsh} \varphi, \quad 0 \leqq t \leqq t_1 = \operatorname{arsh} \varphi_1.$$

Ezzel:

$$s = a \int_0^{t_1} \operatorname{ch}^2 t\, dt = \frac{a}{2} \int_0^{t_1} (\cos 2t + 1)\, dt = \frac{a}{2} \Big[\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t\Big]_{t=0}^{t_1 = \operatorname{arsh} \varphi_1} =$$

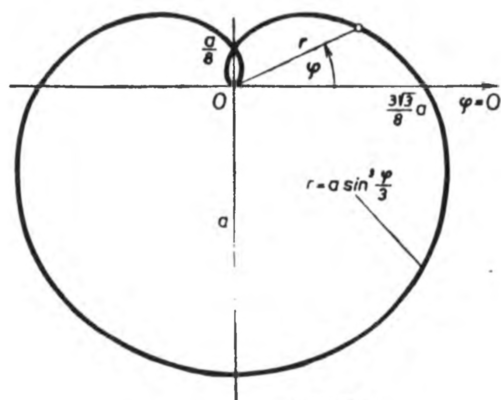
$$= \frac{a}{2} \left[\varphi_1 \sqrt{1 + \varphi_1^2} + \ln \left(\varphi_1 + \sqrt{1 + \varphi_1^2}\right)\right].$$

5. *Hiperbolikus spirális:* $r = \dfrac{a}{\varphi}$; $1 \leqq \varphi \leqq \varphi_1$;

$$s = a \int_1^{\varphi_1} \frac{\sqrt{\varphi^2 + 1}}{\varphi^2}\, d\varphi = \int_{\operatorname{arsh} 1}^{t = \operatorname{arsh} \varphi_1} \operatorname{cth}^2 u\, du\,.$$

Végül:

$$s = a \left\{ \sqrt{2} - \frac{\sqrt{1 + \varphi_1^2}}{\varphi_1} + \ln \frac{\varphi_1 + \sqrt{1 + \varphi_1^2}}{1 + \sqrt{2}} \right\}.$$



120. ábra

6. $r = a\dfrac{e^{\varphi} - 1}{e^{\varphi} + 1}$; ívhossza az origótól?

7. $r = \dfrac{p}{1 + \cos \varphi}$; $\varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$.

8. $r = a \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$ (120. ábra).

$s(0, 3\pi) = ?$

9. $r = a\, e^{\arcsin t} \sqrt{1 - t^2}$, $\varphi = \arcsin t - \dfrac{1}{2} \ln (1 - t^2)$, *spirális:* poláris-paraméteres megadás; $0 \leqq t \leqq t_1 < 1$.

10. $r = \dfrac{a}{\cos^2 \dfrac{\varphi}{2}}$; $s\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) = ?$

$\gamma_2)$ 11. Mekkora a $\varphi = \dfrac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \arccos \dfrac{a}{r}$ poláregyenletű *körevolvens* ív-

hossza a görbe kezdőpontjától számítva $(r_0 = a)$?

$$\varphi' = \frac{r}{a\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}} \cdot \frac{a}{r^2} = \frac{r^2 - a^2}{ar\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Az integrálandó:

$$\sqrt{1 + r^2\varphi'^2(r)} = \sqrt{1 + r^2\frac{r^4 - 2r^2a^2 + a^4}{a^2r^2(r^2 - a^2)}} = \frac{r}{a}.$$

Tehát

$$s_1 = \int_a^{r_1} \frac{r}{a}\,dr = \frac{r_1^2 - a^2}{2a}.$$

12. $\varphi = \dfrac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} - \arccos\dfrac{r}{a}$; *kör trajektóriája*; $s(a, r_1) = ?$

13. $\varphi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{r} + \dfrac{r}{a}\right)$; $s(a, r_1) = ?$

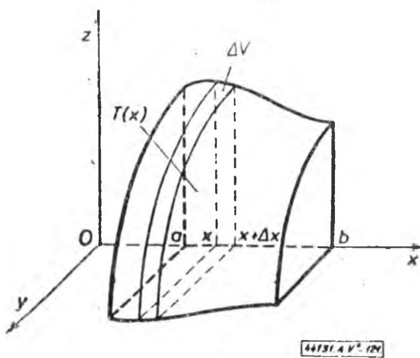
5. §. TÉRFOGATSZÁMÍTÁS

a) Általános megjegyzések

α) Térfogatdifferenciál. Alapképletek

*α_1) Két szemléletes alapelv*ből indulunk ki: *a)* a testek térfogata *additív* tulajdonságú; *b)* az *egyenes henger térfogata* az alapterület és a magasság szorzatával egyenlő.

α_2) Legyen ismeretes egy, pl. az x tengely mentén kiterjedő test e *tengelyre merőleges metszetének T területe*, mint az x abszcissza $T(x)$ függvénye. A test $[a, x]$ *szakaszra eső* darabjának *térfogat*át jelöljük $V(a, x)$ -szel, mely szintén *függvénye az x-nek. Ez utóbbi **differenciál**ja* az $[x, x + \Delta x]$ szakaszon így nyerhető (121. ábra):



121. ábra

$$T_{min}\, \Delta x \leq \Delta V \leq T_{max}\, \Delta x \quad : T(x)\, \Delta x$$

$$\frac{T_{min}}{T(x)} \leq \frac{\Delta V}{T(x)\, \Delta x} \leq \frac{T_{max}}{T(x)}$$

Ha $T(x)$ folytonos függvény, akkor $\Delta x = dx \to 0$ határátmenetko--

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \cdot \frac{1}{T(x)} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{1}{T(x)} = 1$$

ahonnan *a keresett differenciál:*

$$\boldsymbol{dV = T(x)\, dx.}$$

α_3) A test térfogata tehát az $a \leq x \leq b$ szakasz mentén:

$$V(a, b) = \int_a^b T(x)\, dx,$$

a *változó felső határú* $a \leq x \leq x_1$ szakasz mentén pedig:

$$V(a, x_1) = \int_a^{x_1} T(x)\, dx.$$

Megkívánjuk, hogy a $T(x)$ függvény az adott szakaszon legalább részszakaszon**ként** *folytonos* (s így ezeken primitív függvénnyel rendelkező) legyen.

α_4) A térfogatszámításhoz láthatóan az szükséges, hogy ismerjük valamely számegyenes mentén, tetszőleges x helyen e tengelyre merőleges metszet $T(x)$ területét. Hang-

súlyozzuk, hogy *általában a $T(x)$-et magát is integrálással határozzuk meg; ily módon a $V(a, x)$ térfogat számítása rendszerint kétszeres integrálást igényel.*

α_5) Van azonban *számos speciális eset*, amelyekben a $T(x)$ egyszerű meggondolások alapján könnyen felírható, következésképpen *a térfogatszámítás egyszeres integrálással eszközölhető.* Vizsgáljunk ezek közül néhány fontosabbat!

b) Forgástesttel kapcsolatos számítások

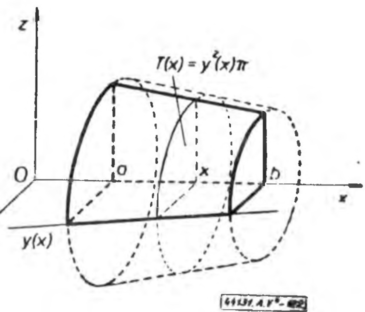
α) Forgástest térfogata

α_1) *Forgassunk meg az x tengely körül az (x, y) síkban adott* $y = f(x)$ egyenletű *görbe* $a \leq x \leq b$ szakaszmenti *darabját.* Az így nyert *forgástest keresztmetszete* valamely x helyen nyilván:

$$T(x) = y^2(x)\,\pi, \qquad \text{(122. ábra)},$$

tehát az említett *forgástest térfogata* [az a)-ban megadott értelemben]:

$$V_x(a, b) = \int_a^b T(x)\,dx = \pi \int_a^b y^2(x)\,dx.$$



122. ábra

α_2) *Ha az y tengely körül forgatunk*, akkor:

$$V_y(A, B) = \pi \int_A^B x^2(y)\,dy,$$

vagy

$$V_y(A, B) = \pi \int_a^b x^2 y'(x)\,dx.$$

α_3) *Paraméteres megadás esetén:*

$$V_x(\gamma, \delta) = \pi \int_\gamma^\delta y^2(t)\,\dot{x}(t)\,dt,$$

mert az α_1)-beli képletben dx helyébe $\dot{x}(t)\,dt$ írandó.

β) Elliptikus test térfogata

Az előbbivel rokon kérdés! Legyen a test szimmetriatengelye az x tengely; akkor a rá *merőleges metszet* tetszőleges x-abszcisszánál egy olyan *ellipszis*, amelynek egyik féltengelye az (x, y)-síkban adott $y = y(x)$ egyenletű görbe ordinátája, a másik féltengelye pedig az (x, z) síkban adott $z = z(x)$ egyenletű görbe ordinátája; ezen ellipszis *területe:*

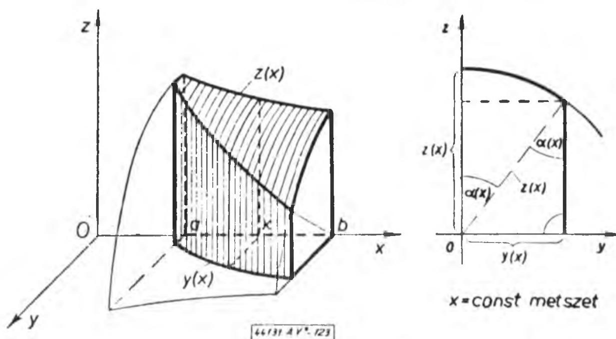
$$T(x) = \pi\, y(x)\, z(x).$$

A test $[a, b]$ szakasz menti darabának *térfogata* tehát:

$$V(a, b) = \pi \int_a^b y(x)\, z(x)\,dx.$$

***γ) Forgás- és hengerfelület határolta térrész**

Legyen adva egy, az (x, z) síkban $z = z(x)$ egyenletű *meridián-görbe* x tengely körüli forgatásával képzett *forgásfelület*, továbbá egy, az (x, y) síkban $y = y(x)$ *vezérgörbéjű* és a z-tengellyel párhuzamos alkotójú egyenes *hengerfelület*.



123. ábra

E két görbefelület, valamint az (x, z) és az (x, y)-sík határolta testnek az x-tengelyre *merőleges keresztmetszete* tetszőleges x-helyen *két részből áll:* egy $z(x)$ sugarú és $\alpha = \arcsin \frac{y(x)}{z(x)}$ szögű *körszektorból*, valamint egy $y(x)$ és $\sqrt{z^2(x) - y^2(x)}$ befogójú *derékszögű háromszögből* (123. ábra). E keresztmetszet *területe* tehát:

$$T(x) = \frac{1}{2} y(x) \sqrt{z^2(x) - y^2(x)} + \frac{1}{2} z^2(x) \arcsin \frac{y(x)}{z(x)}.$$

Az említett test $a \leq x \leq b$ szakasz menti darabjának *térfogata* ily módon:

$$\boldsymbol{V(a, b) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[y(x)\sqrt{z^2(x) - y^2(x)} + z^2(x) \arcsin \frac{y(x)}{z(x)}\right] dx.}$$

Példák és feladatok

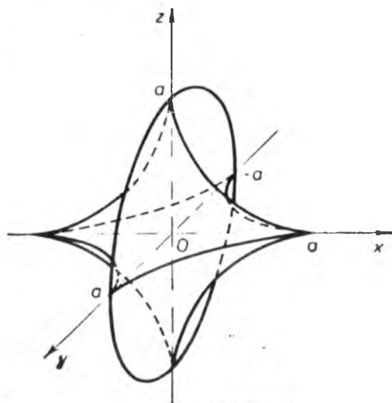
α) 1. Mekkora az $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ görbe $0 \leq x \leq a$ szakasz menti darabjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata?

$$V = \pi \int_{x=0}^{a} \underbrace{\left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^4}_{y^2(x)} dx = \pi \int_0^a \left[a^2 - 4a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + 6ax - 4a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + x^2 \right] dx =$$

$$= \pi \left[a^2 x - 4a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + \right.$$

$$\left. + 6ax^2 \cdot \frac{1}{2} - 4a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{5} + x^3 \cdot \frac{1}{3}\right]_0^a = \frac{a^3\pi}{15}.$$



124. ábra

2. Mekkora az $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *asztrois* x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata? (124. ábra.)

$$V = 2\pi\int\limits_{x=0}^{a}\underbrace{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}_{y^2(x)} dx = 2\pi\int\limits_{0}^{a}\left[a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right]dx =$$

$$= 2\pi\left[a^3 - \frac{9}{5}a^3 + \frac{9}{7}a^3 - \frac{1}{3}a^3\right] = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

3. Mekkora az $y = \text{ch}\ x$ görbe $-1 \leq x \leq 1$ szakasz menti darabjának az x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest térfogata?

$$V = \pi\int\limits_{x=-1}^{+1}\text{ch}^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}\left[x + \frac{\text{sh}\ 2x}{2}\right]_{-1}^{+1} = \frac{\pi}{2}\ (2 + \text{sh}\ 2).$$

4. Mekkora az $x^2e^{2y} - y = 0$ görbe $0 \leq y \leq 1$ szakasz menti darabjának y-tengely körüli megforgatásával nyert forgástest köbtartalma?

$$V = \pi\int\limits_{y=0}^{1} x^2(y)\, dy = \pi\int\limits_{0}^{1} ye^{-2y}\, dy.$$

Parciálisan integrálva:

$$V = \pi\left[-\frac{y}{2}e^{-2y}\right]_0^1 - \frac{\pi}{4}\left[e^{-2y}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}e^{-2} - \frac{\pi}{4}(e^{-2} - 1) = -\frac{\pi}{4}\ [3e^{-2} - 1].$$

5. Mekkora az $y^2 = ax\dfrac{x - 3a}{x - 4a}$ görbe $(0 \leq x \leq 3a)$ x-tengely körüli megforgatásával keletkező test térfogata?

$$V = a\pi\int\limits_{x=0}^{3a} x\frac{x - 3a}{x - 4a}dx = a\int\limits_{0}^{3a}\left[x + a + \frac{4a^2}{x - 4a}\right]dx =$$

$$= a\pi\left[\frac{x^2}{2} + ax + 4a^2\ln\ (x - 4a)\right]_0^{3a} = \frac{a^3\pi}{2}\ (15 - 16\ln 2).$$

6. Mekkora az $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}\ (3 - x)$ görbe $(0 \leq x \leq 3)$ x tengely körüli megforgatásával keletkező forgástest térfogata?

$$V = \frac{\pi}{9}\int\limits_{x=0}^{3} x(3 - x)^2\, dx.$$

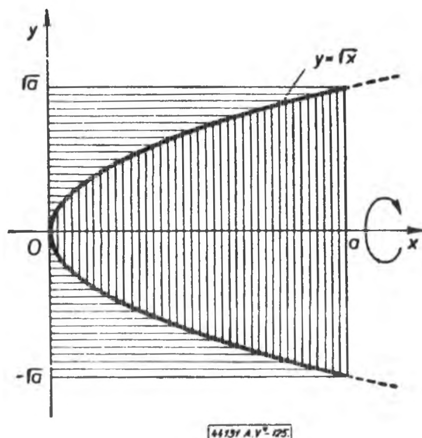
Folytassuk!

7. Forgassuk meg az $y = a$ egyenest az x-tengely körül, a $0 \leq x < m$ szakaszon. Mekkora az így keletkező a sugarú, m magasságú *körhenger* térfogata?

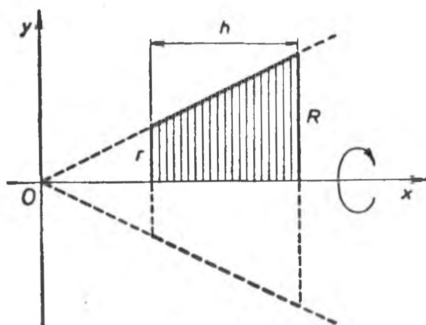
8. Mekkora az $y = ax$ egyenes $0 \leq x \leq m$ szakasz menti darabjának az x-tengely körüli megforgatásával képzett *kúp* térfogata?

9. Mekkora az $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$ görbe $0 \leq x \leq a$ szakasz menti darabjának az x-tengely körüli megforgatásával képzett forgástest térfogata?

10. Forgassuk meg az $y = \sqrt{x}$ *parabolának* a $[0, a]$ szakaszhoz tartozó ívét az x tengely körül és igazoljuk, hogy a forgásfelület és az $x = a$ helyen az x tengelyre állított merőleges sík határolta térfogat a körülvevő henger térfogatának felével egyenlő (125. ábra).



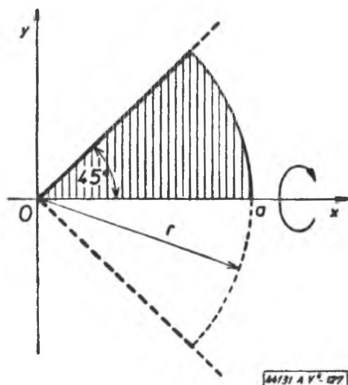
125. ábra



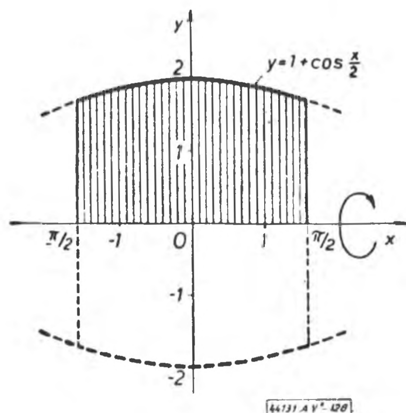
126. ábra

11. Határozzuk meg a 126. ábrán látható *csonkakúp* térfogatát. (Írjuk fel az alkotó egyenletét.)

12. Forgassuk meg a 127. ábrán látható *körcikket* az x tengely körül. Számítsuk ki a nyert *gömbcikk* térfogatát.



127. ábra



128. ábra

13. Egy *hordó dongájának* egyenlete:

$$y = 1 + \cos\frac{x}{2}, \quad \text{ahol} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Számítsuk ki a hordó köbtartalmát (128. ábra)

Forgassuk meg az alábbi görbéket az x tengely körül és határozzuk meg az így nyert forgásfelületek, valamint a megadott intervallumok végpontjaiban az x tengelyre merőleges síkok határolta térrész térfogatát:

14. $y = e^{2x}$; $V_x(0, 2) = ?$

15. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; $V_x(1, 4) = ?$

16. $y = \frac{x^3}{3}$; $V_x(1, 2) = ?$

17. $y = x - \frac{1}{x}$; $V_x(1, 3) = ?$

18. $y = 1 - x^2$; $V_x(-1, 1) = ?$

19. $y^2 - x^2 = 1$; $V_x(0, 3) = ?$

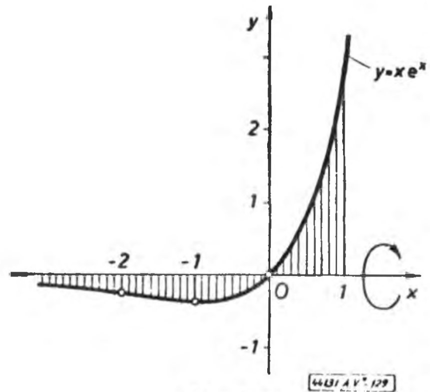
20. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$; $V_x(1, 4) = ?$

21. $y = \cos^2 x$; $V_x(0, \pi) = ?$

22. $y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$; $V_x(1, 3) = ?$

23. $y = x\,e^x$; $V_x(-\infty, 0) = ?$
$V_x(0, 1) = ?$ (129. ábra.)

24. $y = \ln x$; $V_x(1, 3) = ?$



129. ábra

25. Forgassuk meg az $y = 5 - x^2$ görbét az y tengely körül és állapítsuk meg az így keletkező forgástest térfogatát az $1 \leq y \leq 3$ szakaszon.

Kétféle módon is eljárhatunk.

a) Megállapítjuk az *inverz függvényt* és y integrálási változóval dolgozunk, a megadott határok mellett:

$$x = \sqrt{5 - y}, \quad x^2 = 5 - y$$

és ezzel

$$V_y = \pi \int_A^B x^2(y)\, dy = \pi \int_1^3 (5 - y)\, dy = \pi \left[5y - \frac{y^2}{2} \right]_1^3 =$$

$$= \pi \left| 15 - \frac{9}{2} - 5 + \frac{1}{2} \right| = 6\pi.$$

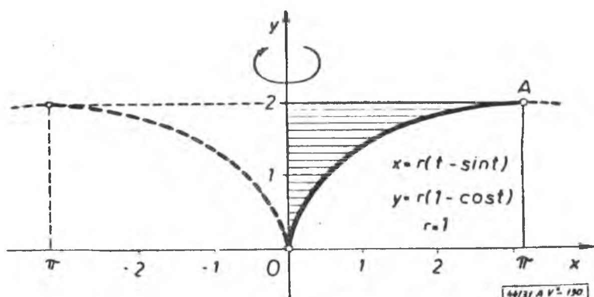
b) Az x integrálási változóval dolgozunk, megállapítjuk az adott függvény alapján ennek változási határait:

$$a = 2, \; b = \sqrt{2} \quad \text{és} \quad dy = f'(x)\, dx = -2x\, dx, \text{ amelyekkel:}$$

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 f'(x)\, dx = -2\pi \int_2^{\sqrt{2}} x^3 dx = +2\pi \int_{\sqrt{2}}^{2} x^3\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left| x^4 \right|_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{\pi}{2} [16 - 4] = 6\pi.$$

Forgassuk meg az alábbi görbéket az y tengely körül, és határozzuk meg az így nyert forgásfelületek, valamint az y-ra megadott intervallum végpontjaiban az y tengelyre merőleges síkok határolta térrész térfogatát. Dolgozzunk esetenként az előnyösebbik módszerrel, esetleg mindkettővel.



130. ábra

26. $y = x^3$; $V_y(0, 3) = ?$

27. $y = \dfrac{1}{x^2}$; $V_y(1, 4) = ?$

28. $y = \dfrac{2}{1 + 2x^2}$; $V_y(1, 2) = ?$

29. $y = \ln x$; $V_y(0{,}5,\ 1{,}5) = ?$

30. $y = \dfrac{1}{1 - x}$; $V_y(1, 3) = ?$

31. $y^2 - x^2 = 1$; $V_y(1, 3) = ?$

32. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$; $V_y(1, 4) = ?$

33. $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$; $V_y(2, 4) = ?$

34. $y = e^x$; $V_y(1, 2) = ?$

•

35. Forgassuk meg az

$$x = r(t - \sin t), \quad y = r(1 - \cos t)$$

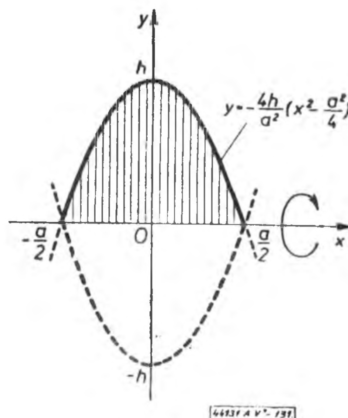
cikloisnak a paraméter $0 \leq t \leq \pi$ szakaszához tartozó $\overset{\frown}{OA}$ darabját az y tengely körül, és számítsuk ki a keletkező forgásfelület, valamint az y tengelyre az $y = 2r$ pontjában merőleges sík határolta test térfogatát (130. ábra).

36. Kiszámítandó azon test köbtartalma, melyet az $y = 4x^2$ *parabola* saját tengelye körüli forgatásával nyert felület *(forgási paraboloid)* és a csúcsától 1 egységre fekvő, a tengelyére merőleges sík határol.

37. *A* $2a$ nagy tengelyű, $2b$ kis tengelyű *ellipszist* megforgatjuk 1) a nagy tengelye körül; 2) a kis tengelye körül. Határozzuk meg az így nyert *forgási ellipszoidok* térfogatát. Mint speciális esetet, számítsuk ki a *gömb* köbtartalmát.

38. Az a alapú, h magasságú *szimmetrikus parabolikus szegmenst* (131. ábra) megforgatjuk az alapja körül. Határozzuk meg az így nyert forgástest köbtartalmát. („*Cavalieri-féle citrom.*")

39. Az $x^2 - y^2 = a^2$ *hiperbola* és az $x = a + h$ $(h > 0)$ egyenes határolta síkrészt (132. ábra) megforgatjuk az abszcissza-tengely körül. Határozzuk meg az így nyert forgástest köbtartalmát.



131. ábra

40. A görbevonalú trapézt az $y = xe^{\frac{x}{2}}$ görbe, valamint az $x = 1$ és $y = 0$ egyenesek határolják. Forgassuk meg ezt az x tengely körül, és határozzuk meg az így nyert test köbtartalmát.

41. Az $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *láncgörbét* megforgatjuk az x tengely körül. (Az így nyert felületet *láncfelületnek* [*katenoidnak*] nevezzük.) Határozzuk meg a láncfelület, valamint az $x = a$ és $x = b$ síkok közötti térrész köbtartalmát.

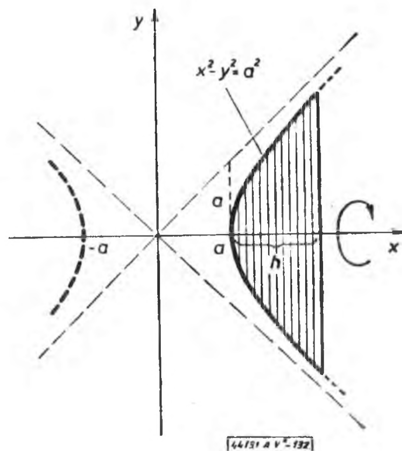
42. Az $y = x^2$ és $y^2 = x$ *parabolák* által határolt síkrészt megforgatjuk az x tengely körül. Számítsuk ki az így nyert test térfogatát.

43. Határozzuk meg az $(x - 4)y^2 = x(x - 3)$ görbe alatti (+) terület x tengely körüli megforgatása által nyert test térfogatát.

44. Határozzuk meg az $y = \arcsin x$ görbe $[0, 1]$ szakaszra eső darabjának x tengely körüli megforgatása által nyert test térfogatát.

45. Határozzuk meg az $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ *lemniszkáta* x tengely körüli megforgatása által nyert forgástest térfogatát.

46. Határozzuk meg az 1) $x^4 + y^4 = a^2x^2$; 2) $x^4 + y^4 = x^3$ görbék által meghatározott síkrész x tengely körüli megforgatása által nyert testek térfogatát.



132. ábra

47. Az $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ *ciklois* egy teljes ívét megforgatjuk az x tengely körül. Számítsuk ki az így nyert forgástest térfogatát.

48. Az *ellipszis evolvensének* paraméteres egyenletrendszere:

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t; \quad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3 t.$$

Első negyedbeli ívét megforgatjuk az abszcissza-tengely körül. Mekkora az így nyer forgástest térfogata?

49. Meghatározandó az $y = \sin x$ görbe fél periódusra eső darabjának az y tengely körüli megforgatásával keletkezett test térfogata.

50. Határozzuk meg azon végtelen orsó köbtartalmát, melyet az $y = \frac{1}{1 + x^2}$ görbének saját aszimptótája körüli megforgatásával kapunk. Mekkora a térfogata a $[-a, a]$ szakaszon?

51. Az $y^2 = 2e\, xe^{-2x}$ görbét megforgatjuk aszimptótája körül. Határozzuk meg az így nyert forgástest térfogatát.

*52. Forgassuk meg az

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{2a - x}}$$

egyenletű *cisszoidot* az *x tengely körül*. Mekkora az így előálló forgástest térfogata az x függvényében? (75. ábra.)

Ekkor:

$$V(0,x_1)=\pi\int_0^{x_1} y^2\,dx=\pi\int_0^{x_1}\frac{x^3}{2a-x}\,dx.$$

Osztás, majd elemi integrálás után kapjuk:

$$V(0,x_1)=\pi\left\{8a^3\ln\left(\frac{2a}{2a-x_1}\right)-x_1\left(4a^2+ax_1+\frac{1}{3}x_1^2\right)\right\}.$$

Speciális esetben $x=a$, ekkor:

$$V(0,a)=8\pi\left(\ln 2-\frac{2}{3}\right)a^3.$$

Ha az *aszimptótája* (az $x=2a$ egyenes) *körül* torog a cisszoid, akkor az $y=$ const. metszetek körök, melyek sugara $|2a-x|$. Ily módon:

$$V(0,y_1)=\pi\int_0^{y_1}(2a-x)^2\,dy=\pi\int_0^{x_1}(3a-x)\sqrt{2ax-x^2}\,dx=$$

$$=\pi\left\{a^3\arccos\frac{a-x_1}{a}-\frac{3a^2-5a\,x_1+x_1^2}{3}\sqrt{2a\,x_1-x_1^2}\right\}.$$

Ha a teljes forgástest köbtartalmát számoljuk, akkor $y_1\to\infty$ és megfelelően $x_1\to 2a$: tehát:

$$V_\infty=\pi^2a^3.$$

Mind a 2 térfelet figyelembe véve: $(-\infty<y<+\infty)$:

$$V_\infty=2\pi^2a^3.$$

***53.** Legyen a koordinátarendszer kezdőpontja *kardioid* képzőkörének középpontja (133. ábra).

Ekkor a kardioid egyenlete:

$$y^2=3a^2-x^2\pm 2a\sqrt{3a^2-2ax},$$

ahol $x=-3a$-tól $x=+a$-ig a pozitív, $x=+a$-tól $x=+\frac{3}{2}a$-ig mind a két előjel értelmezhető. Mekkora azon forgástest köbtartalma, melyet a kardioid x tengely körüli forgatásával nyerünk? Az alsó határ legyen $x_a=-3a$.

Így a köbtartalom:

$$V(-3a,x_1)=\pi\int_{-3a}^{x_1}\left(3a^2-x^2+2a\sqrt{3a^2-2ax}\right)dx=$$

$$=\pi\left[3a^2x-\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{(3a^2-2ax)^3}\,\right]_{-3a}^{x_1}=$$

$$=\pi\left[18a^3+3a^2x_1-\frac{1}{3}x_1^3-\frac{2}{3}\sqrt{(3a^2-2ax_1)^3}\,\right].$$

Ha $x_1 = a$, akkor:

$$V(-3a, a) = 20\pi a^3.$$

Ha pedig $x_a = a$, figyelembe véve a gyök kettős előjelét, a különbségi térrész köbtartalma:

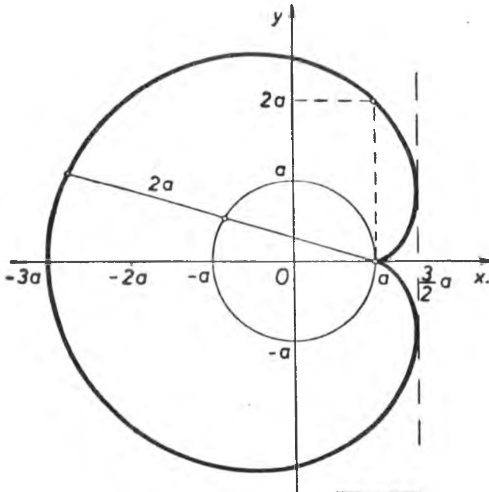
$$V(a, x_1) = 4a\pi \int_0^{x_1} \sqrt{3a^2 - 2ax}\, dx = \frac{4}{3}\pi \left[a^3 - \sqrt{(3a^2 - 2a x_1)^3}\right].$$

Érdekes, hogy ezek alapján az $\left[a, \frac{3}{2}a\right]$ közti gyűrűalakú rész térfogata:

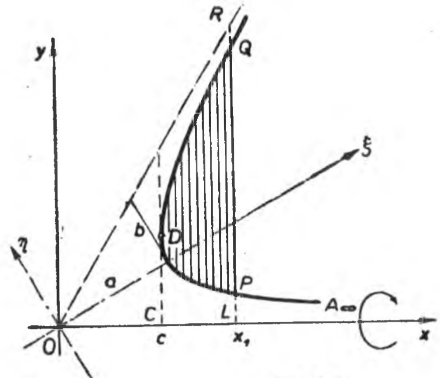
$$V\left(a, \frac{3}{2}a\right) = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Ha ehhez hozzáadjuk a $[-3a, a]$ közti rész térfogatát, *az a sugarú gömb térfogatának 16-szorosát* kapjuk!

**54. Egy *hiperbolát*, melynek a valós féltengelye nagyobb, mint b képzetes féltengelye, az $\overline{OA_\infty}$ *aszimptótája körül megforgatunk*. Meghatározandó a *PDQP* metszetű, gyűrűalakú test térfogata (134. ábra).



133. ábra



134. ábra

Legyen a forgástengely az x tengely, a P és Q pontra illeszkedő, rá merőleges egyenes pedig az y tengely. E derékszögű koordinátarendszerben a görbe egyenletét az eredeti $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletből — az $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ szögű elforgatásnak megfelelően —

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y, \quad \eta = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}y$$

transzformáció segítségével kapjuk; némi átalakítás után:

$$(a^2 - b^2)\,y^2 - 2abxy + a^2b^2 = 0.$$

Ebből meghatározható azon két y érték, mely az LP és LQ ordinátának felel meg. A görbe egyenletéből kifejezve y^2-et. nyerjük:

$$y_{1,2}=\frac{2abx\pm\sqrt{a^2b^2 4x^2-4a^2b^2(a^2-b^2)}}{2(a^2-b^2)}=\frac{ab(x\pm\sqrt{x^2-a^2+b^2})}{a^2-b^2},$$

$$y_{1,2}^2=\frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^2}(x^2\pm 2x\sqrt{x^2-a^2+b^2}+x^2-a^2+b^2).$$

Az $x=\sqrt{a^2-b^2}$ helyen láthatóan a diszkrimináns 0, azaz itt $y_1=y_2=\frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$; ezen ordináta egyszersmind *érintője* is a görbének. Figyelembe véve, hogy $a^2-b^2=c^2$ és integrálva az $y_1^2-y_2^2=4x\sqrt{x^2-a^2+b^2}=4x\sqrt{x^2-c^2}$ kifejezést (tekintettel a gyűrűtestre, mint két forgástest különbségére) nyerjük:

$$V_1(c,x_1)=\pi\int\limits_{x_0=\sqrt{a^2-b^2}}^{x_1}4x\sqrt{x^2-c^2}\,dx=\frac{4\pi a^2b^2}{3c^4}\sqrt{(x_1^2-c^2)^3}.$$

Ezután meghatározhatjuk az $OLPDQRO$ felület megforgatásából keletkező forgástest V_3 térfogatát. Lévén $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$, $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{2ab}{c^2}$ és a megforgatott egyenes $y=\operatorname{tg}2\alpha\cdot x$, írhatjuk:

$$V_2(0,x_1)=\pi\int\limits_0^{x_1}y^2\,dx=\frac{4\pi a^2b^2}{c^4}\int\limits_0^{x_1}x^2\,dx=\frac{4\pi a^2b^2}{3c^4}x_1^3.$$

Ily módon:

$$V_3(0,x_1)=V_2(0,x_1)-V_1(c,x_1)=\frac{4\pi a^2b^2}{3c^4}\left[x_1^3-\sqrt{(x_1^2-c^2)^3}\right].$$

55. Forgassuk meg az $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ *cikloist* függőleges szimmetria-tengelye körül. Határozzuk meg az így nyert forgástest köbtartalmát.

56. Meghatározandó azon test köbtartalma, melyet az $x+y=4$ egyenessel és a $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ parabolával meghatározott *parabola-szegmens*nek az $y=x$ egyenes körüli megforgatása útján kapunk. (Válasszuk új koordinátatengelynek az $y=x$ és $y+x=4$ egyeneseket.)

57. *a)* Az $y=e^{-x}$ görbe és aszimptótája által határolt síkrészt megforgatjuk az ordinátatengely körül. Határozzuk meg az így keletkezett test térfogatát.

b) Ugyanezt a síkrészt forgassuk meg az x tengely körül. Határozzuk meg az így nyert test térfogatát. $\left(\text{Használjuk fel, hogy} \int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

58. Határozzuk meg az $y=x^2e^{-x}$ görbének aszimptótája körüli megforgatásával képzett test köbtartalmát. (Lásd az előző feladathoz adott útmutatást.)

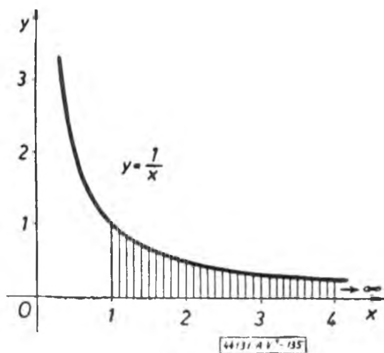
59. Határozzuk meg az $y = \frac{\sin x}{x}$ görbe x tengely körüli megforgatásával képzett test térfogatát. $\left(\text{Vegyük figyelembe, hogy } \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\right)$.

60. Határozzuk meg az $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ *traktrix*nak aszimptótája körüli megforgatásával képzett test térfogatát.

61. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x}$ *egyenlőszárú hiperbola* esetében a 135. ábrán vonalkázással feltüntetett, végtelenbe nyúló görbe alatti területet.

A kérdezett terület:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x - \ln 1 = \infty.$$



135. ábra

Határozzuk meg ezekután azt a térfogatot, amely ezen területnek az x tengely körüli forgatásakor keletkezik:

$$V = \pi\int\limits_1^\infty y^2\,dx = \pi\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \pi\left[\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + 1\right] = \pi.$$

Azt az — első pillanatra szokatlanul hangzó — eredményt kaptuk tehát, hogy egy *végtelen területű síkrész megforgatásakor véges térfogatú forgástest is jöhet létre.*

62. Az $y = x^{\frac{3}{2}}$ *Neil-féle parabola* felső ágának $[0, a]$ szakaszmenti darabját megforgatjuk mindkét tengely körül. Milyen a érték mellett lesz az így keletkező *két forgástest térfogata egyenlő*?

A két forgástest térfogata:

$$V_x(0, a) = \pi\int\limits_0^a x^3\,dx = \frac{\pi a^4}{4},$$

illetve

$$V_y[0, f(a)] = \pi\int\limits_0^{a^{\frac{3}{2}}} x^2\,dy = \pi\int\limits_0^{a^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{4}{3}}\,dy = \frac{3\pi}{7}\Big[y^{\frac{7}{3}}\Big]_0^{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{7}\pi a^{\frac{7}{2}}.$$

Ezek egyenlők:

$$V_x(0, a) = V_y\left(0, a^{\frac{3}{2}}\right), \quad \text{ha} \quad \frac{\pi a^4}{4} = \frac{3\pi a^{\frac{7}{2}}}{7},$$

azaz

$$a = \frac{144}{49}.$$

63. Az előző példabeli *Neil-féle parabolá*nak most ne az x, illetve az y tengely $[0, a]$, illetve $\left[0, a^{\frac{3}{2}}\right]$ szakasza menti darabját forgassuk meg a két tengely körül, hanem mindkét tengely $[0, a]$ szakasza menti darabját. Oldjuk meg az előző feladatot erre az esetre!

A két torgástest térfogata:

$$V_x(0, a) = \pi \int_0^a x^3\, dx = \frac{\pi a^4}{4},$$

illetve

$$V_y(0, a) = \pi \int_0^a y^{\frac{4}{3}}\, dy = \frac{3\pi a^{\frac{7}{3}}}{7}.$$

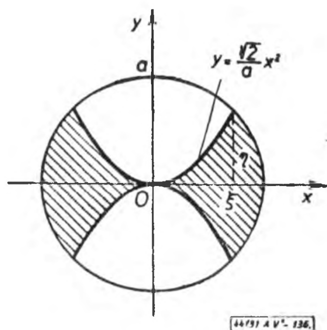
Ezek egyenlők:

$$V_x(0, a) = V_y(0, a), \quad \text{ha} \quad \frac{\pi a^4}{4} = \frac{3\pi a^{\frac{7}{3}}}{7},$$

azaz

$$a = 2\sqrt[5]{\frac{54}{343}} \approx 1{,}382.$$

64. Az $x^2 + y^2 = a^2$ *kör* felső felét elmetsszük az $y = \frac{\sqrt{2}}{a} x^2$ *parabolá*val; kiszámítandó a 136. ábrán vonalkázott síkrész x tengely körüli megforgatása által nyert test térfogata.



136. ábra

A két egyenletből a *metszéspontok* koordinátái:

$$\xi = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad \eta = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Ezzel (tekintettel a szimmetriára):

$$V = 2\pi \left[\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{2x^4}{a^2}\, dx + \int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a} (a^2 - x^2)\, dx \right] =$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{2}{5a^2} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^5 + a^2 \left(a - \frac{a}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{3} \left[a^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^3 \right] \right\} = 2\pi a^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{11}{30}\sqrt{2} \right) \approx 9{,}31\, a^2.$$

65. Az $y = x(x - a)$ *parabola* $[0, c]$ szakaszmenti darabját ($c > a > 0$) megforgatjuk az x tengely körül. Mekkora c érték esetén lesz az így keletkező *forgástest térfogata egyenlő* azon *kúpéval,* mely az OP húr x tengely körüli megforgatása által keletkezik? (P a görbe c abszcisszájú pontja. 137. ábra.)

A forgástest térfogata egyelőre határozatlan c értékkel:

$$V = \pi \int_0^c x^2 (x - a)^2 \, dx = \pi \int_0^c (x^4 - 2ax^3 + a^2x^2) \, dx = \pi \left(\frac{c^5}{5} - \frac{ac^4}{2} + \frac{a^2 c^3}{3} \right).$$

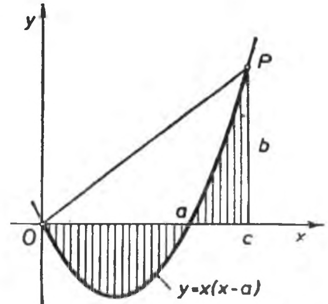
A kúp alapkörének sugara (lévén P az adott görbe pontja): $b = c(c - a)$, magassága: c, térfogata tehát:

$$V_{\text{kúp}} = \frac{\pi c^3 (c - a)^2}{3}.$$

A feltétel szerint a két térfogat egyenlő:

$$V = V_{\text{kúp}}, \quad \text{azaz} \quad \pi \left(\frac{c^5}{5} - \frac{ac^4}{2} + \frac{a^2 c^3}{3} \right) = \frac{\pi c^3 (c - a)^2}{3};$$

ebből a $c = \frac{5}{4} a$ érték adódik.



137. ábra

66. Az $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2}$ görbéjét megforgatjuk az x tengely körül. $V(0, x_1) = ?$ $V(0, \infty) = ?$ Milyen a érték mellett lesz $V(0, a) = \frac{1}{2} V(0, +\infty)$? (L. hátul a 189. ábrát!)

Az ismert formulával:

$$V(0, x_1) = \pi \int_0^{x_1} \frac{x \, dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{2} \int_0^{x_1} \frac{2x \, dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{1 + x^2} \right]_0^{x_1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + x_1^2} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{x_1^2}{1 + x_1^2}.$$

Eszerint:

$$V(0, \infty) = \frac{\pi}{2}$$

és

$$V(0, a) = \frac{\pi}{2} \frac{a^2}{1 + a^2} = \frac{\pi}{4}, \text{ ha } a = 1.$$

Tehát:

$$V(0, 1) = \frac{1}{2} V(0, \infty).$$

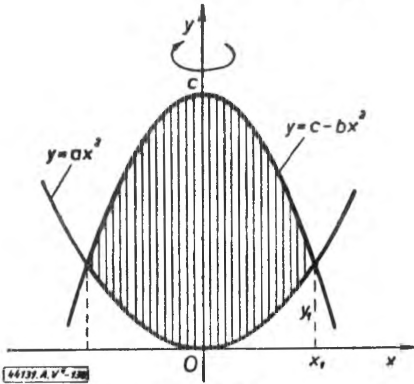
67. Egy *kehelyalakú próbaüveg*, amely az $y^2 = 2px$ *parabolának* y tengely körüli megforgatása által keletkezik, h magasságig folyadékkal van töltve. Mennyivel emelkedik a folyadéktükör, ha még m térfogategységnyi folyadékot töltünk hozzá?

Jelöljük az *emelkedést* δ-val. A feltevés szerint:

$$m = \pi \int_h^{h+\delta} x^2\,dy, \quad \text{ahol} \quad x = \frac{y^2}{2p}.$$

Ezzel:

$$m = \frac{\pi}{4p^2} \int_h^{h+\delta} y^4\,dy = \frac{\pi}{20p^2}\left[(h+\delta)^5 - h^5\right].$$



138. ábra

Ebből δ-t kifejezve:

$$\delta = \sqrt[5]{h^5 + \frac{20mp^2}{\pi}} - h.$$

68. Meghatározandó az $y = a\,x^2$ és $y = c - b\,x^2$ $(a, b, c > 0)$ görbék közti területnek az y tengely körüli megforgatásával képzett test térfogata (138. ábra).

A két parabola *metszéspont*jainak koordinátái:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{a+b}}, \quad y_{1,2} = \frac{ac}{a+b}.$$

Ezzel a térfogat:

$$V = \pi \int_0^{y_1} \frac{y}{a}\,dy + \pi \int_{y_1}^{c} \frac{c-y}{b}\,dy =$$

$$= \pi\left[\frac{y^2}{2a}\right]_0^{y_1} + \frac{\pi}{b}\left[cy - \frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{c} =$$

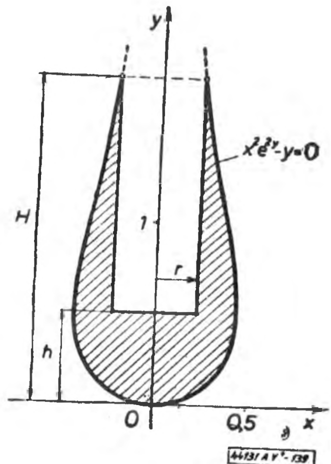
$$= \pi\left[\frac{y_1^2}{2a} + \frac{c(c-y_1)}{b} - \frac{c^2-y_1^2}{2b}\right].$$

Közös nevezőre hozva, majd y_1 értékét behelyettesítve és összevonva kapjuk:

$$V = \frac{\pi}{2}\,\frac{c^2}{a+b}.$$

69. Meghatározandó a 139. ábrán látható síkrész y tengely körüli megforgatásával képzett test köbtartalma. A meridiángörbe egyenlete:

$$x^2 e^{2y} - y = 0.$$



139. ábra

A teljes forgástest köbtartalma:

$$V_1 = \pi \int_0^H x^2\,dy = \pi \int_0^H y\,e^{-2y}\,dy = \frac{\pi}{2}\left[y\,e^{-2y}\right]_0^H + \frac{\pi}{2}\int_0^H e^{-2y}\,dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} He^{-2H} - \frac{\pi}{4}(e^{-2H} - 1).$$

A belső körhenger r sugara, mint a H ordinátához tartozó abszcissza: $r = \sqrt{H}\,e^{-H}$; a körhenger térfogata tehát:

$$V_2 = He^{-2H} \cdot \pi (H - h).$$

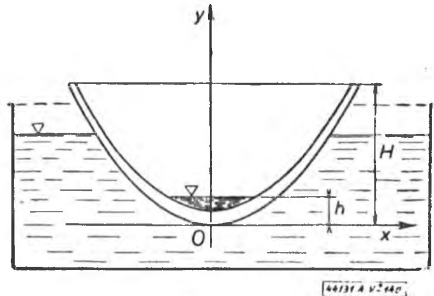
A keresett térfogat végül:

$$V = V_1 - V_2 = \left\{1 - e^{-2H}\,[1 - 2H + 4H(H - h)]\right\}\frac{\pi}{4}.$$

70. Egy *forgási paraboloid-alakú porcelántégely* (külső magassága $H = 10$ cm fal súlya 2,5 g/cm³) az

$$y = \frac{1}{10}x^2, \quad \text{illetve} \quad y = \frac{1}{10}(x^2 + 10)$$

parabolák y tengely körüli megforgatása útján keletkezik. A tégely egy medencében úszik (140. ábra). Milyen mélyen merül le, ha $h = 2$ cm-nyi magasságig higany van benne (ennek fajsúlya 13,5 g/cm³)?



140. ábra

A tégely köbtartalma:

$$V = \pi \int_0^H 10y\,dy - \pi \int_1^H 10(y - 1)\,dy =$$

$$= 5\pi\,[H^2 - (H - 1)^2]\,;$$

a H értékét behelyettesítve pedig:

$$V = 95\pi = 298{,}45 \text{ cm}^3.$$

A tégely súlya:

$$G = 746{,}13 \text{ g}.$$

A higany köbtartalma:

$$V_{hg} = 10\pi \int_1^2 (y - 1)\,dy = 10\pi\left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^2 = 5\pi \text{ cm}^3,$$

súlya pedig:

$$G_{hg} = 13{,}5 \cdot 5\pi = 212{,}06 \text{ g}.$$

A lemerülési mélységet jelöljük egyelőre z-vel. A lemerülés — *Archimedes* törvénye szerint (l. a 8. §.-ban) — akkora, hogy a kiszorított víz súlya épen egyenlő az egész test súlyával. A kiszorított víz térfogata (és számértékben súlya):

$$V_{víz} = \pi \int_0^z 10y\, dy = 5\pi z^2 = G_{víz}.$$

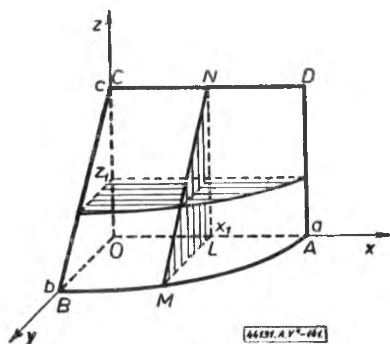
Ezt egyenlővé téve a tégely és higany összsúlyával, nyerjük:

$$5\pi z^2 = 2{,}5 \cdot 95\pi + 13{,}5 \cdot 5\pi.$$

A kérdezett *lemerülési mélység* tehát:

$$z = \sqrt{61} \approx 7{,}81 \text{ cm}.$$

β | 1. Valamely felület nyomvonala az (x, y) síkon $OA = a$ és $OB = b$ féltengelyű *ellipszis*, az (x, z) síkon pedig az x tengelytől $OC = c$ távolságban futó, vele párhuzamos $CD = a$ *egyenes* (141. ábra). Ennek az *elliptikus ék-felület*nek az (y, z) síkkal párhuzamos metszeteit egyenesek határolják. Határozzuk meg e test térfogatát a z függvényében.



141. ábra

Itt az alap- és $OP = z_1$ ordinátájú sík közötti test térfogata:

$$V(0, z_1) = \frac{1}{4}\int_0^{z_1} \pi xy dz,$$

ugyanis a test z = const. metszetei negyed-ellipszisek. Minthogy:

$$x = a \quad \text{és} \quad y = b - \frac{b}{c} z = \frac{cb - zb}{c} = \frac{b}{c}(c - z),$$

ezért a kérdezett térfogat:

$$V(0, z_1) = \frac{\pi}{4}\int_0^{z_1} \frac{ab}{c}(c - z)\, dz = \frac{\pi ab}{4} z_1\left(1 - \frac{z_1}{2c}\right).$$

Ha $z_1 = c$-vel, ez így alakul:

$$V(0, c) = \frac{\pi abc}{8}.$$

Ugyanezt kell kapnunk, ha a c) α) 3. példában a

$$V(0, x_1) = \frac{bc}{4}\left[\frac{x_1}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2} + a \arcsin \frac{x_1}{a}\right]$$

képletbe $x_1 = a$-t helyettesítünk.

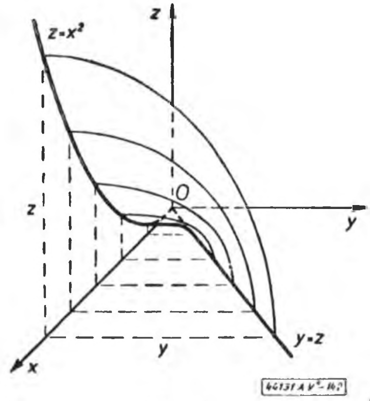
2. Állapítsuk meg az $y = x$ és $z = x^2$ egyenletű görbékkel meghatározott elliptikus test $x = 0$ és $x = x_1$, majd $x = 0$ és $x = a$ egyenletű síkok közé eső részének térfogatát (142. ábra).

Esetünkben:

$$V(0, x_1) = \pi \int_0^{x_1} y(x)\, z(x)\, dx = \pi \int_0^{x_1} x\, x^2\, dx = \frac{\pi x_1^4}{4}.$$

Eszerint:

$$V(0, a) = \frac{a^4 \pi}{4}.$$



142. ábra

γ 1. Az (x, z) síkban adva van egy $z = \sqrt{2cx}$ egyenletű *parabola*, amit megforgatva az x tengely körül, egy *forgási paraboloidot* nyerünk. Ezt messük egy *parabolikus hengerrel*, melynek alkotói párhuzamosak a z tengellyel és vízszintes nyomvonalának egyenlete: $y = \sqrt{2bx}$, ahol $b \leq c$.

Meghatározandó azon test térfogata, melyet az (x, y) sík, az (x, z) sík, az $x = x_1$ sík, valamint a két felület határol!

Az y-ra és z-re explicit kifejezésünk van, amely közvetlenül beírható a formulába:

$$V(0, x_1) = \int_0^{x_1} \frac{1}{2}\left(y\sqrt{z^2 - y^2} + z^2 \arcsin \frac{y}{z}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{x_1} \left[\sqrt{2bx}\sqrt{x(2c - 2b)} + 2cx \arcsin \sqrt{\frac{b}{c}}\right] dx =$$

$$= \left[\sqrt{b(c - b)} + c \arcsin \sqrt{\frac{b}{c}}\right] \frac{x_1^2}{2}.$$

Ha $b = c$, úgy:

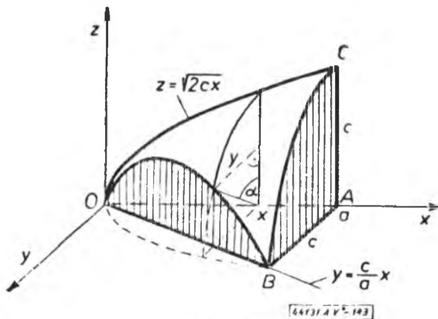
$$V(0, x_1) = \frac{\pi c x_1^2}{4}.$$

Ha a teljes forgástestre írjuk fel és $x_1 = m$:

$$V(0, m) = m^2 c\pi,$$

ami *a burkolóhenger fele* $(V_h = 2cm\pi \cdot m)$.

*2. Az (x, z) síkban lévő $z = \sqrt{2cx}$ egyenletű *parabolát* az x tengely körül megforgatjuk; az így keletkező *forgási paraboloidot* az $\overline{OA} = \frac{c}{2}$ távolságban az x tengelyre merőleges *síkkal* elmetsszük. Az $\overline{OB}$ egyenesen átfektetünk egy, az (x, y) síkra merőleges síkot $\left(143.\ \text{ábra; ott } \frac{c}{a} \neq 2\right)$.



143. ábra

Mekkora azon test köbtartalma, melyet az ODB, OAB, ABC és OAC síkidom, valamint a forgási paraboloid-felület határol? ($\overline{AC} = \overline{AB} = c$, $\overline{OA} = a$.)

Az $\overline{OB}$ egyenes egyenlete: $y = \frac{c}{a}x$. Mivel $x = a$ esetben $z = c$, így $c = 2a$, $\left(\frac{c}{a} = 2\right)$.

Ezzel az x abszcisszájú keresztmetszet formulánk szerint:

$$T(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{c}{a}x\sqrt{2cx - \frac{c^2}{a^2}x^2} + 2cx \arcsin\frac{\frac{c}{a}x}{\sqrt{2cx}}\right] =$$

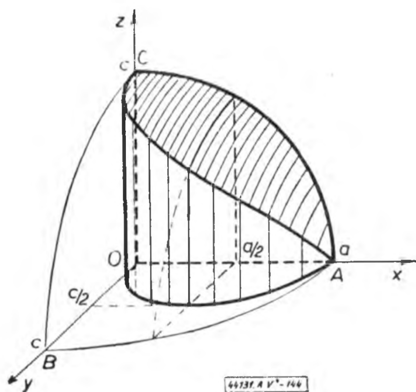
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}x\sqrt{4ax - 4x^2} + 2cx \arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}\right) = c\left(\frac{x\sqrt{ax - x^2}}{a} + x \arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}\right).$$

Így a térfogat:

$$V(0, x_1) = \int_0^{x_1} T(x)\,dx = c\int_0^{x_1}\left(\frac{x\sqrt{ax - x^2}}{a} + x \arcsin\sqrt{\frac{x}{a}}\right)dx.$$

Ezt két tagra bontva és az elsőt helyettesítéssel, a másodikat parciálisan integrálva nyerjük:

$$V(0, x_1) = c\left[\frac{8x_1^2 - a^2}{16}\arcsin\sqrt{\frac{x_1}{a}} + \frac{16x_1^2 + 2ax_1 + 3a^2}{48a}\sqrt{ax_1 - x_1^2}\right].$$



144. ábra

Ha pedig $x_1 = a$, akkor (lévén $c/a = 2$):

$$V(0, a) = \frac{7}{32}\pi a^2 c = \frac{7}{128}\pi c^3.$$

*3. Az (x, z) síkban adva van egy $z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ egyenletű *ellipszis*, melyet az x tengely körül megforgatunk. Az így keletkező *forgási ellipszoid*ot egy *elliptikus hengerrel* metszszük, melynek vezérgörbéje az (x, y) síkon $\frac{a}{2}$ és $\frac{c}{2}$ féltengelyű és a 144. ábrán feltüntetett helyzetű ellipszis.

Most $y = \frac{c}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\right)^2}$, tehát egy x abszcisszájú keresztmetszet területe:

$$T(x) = c^2\frac{a - x}{2a^2}\sqrt{ax} + \frac{c^2}{2a^2}(a^2 - x^2)\arctg\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

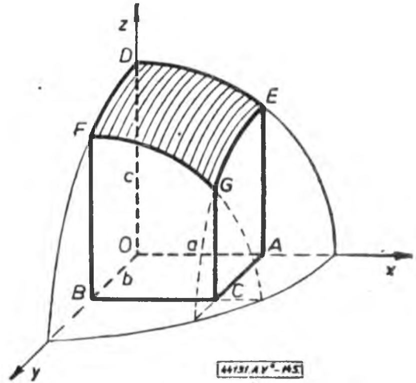
E kifejezést tagokra bontva és parciálisan integrálva nyerjük:

$$V(0, x_1) = \frac{c^2}{18a}\left[\frac{3(2a^3 + 3a^2 x_1 - x_1^3)}{a} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x_1}{a}} - \frac{6a^2 - 5ax_1 + 3x_1^2}{a^2}\sqrt{ax_1}\right].$$

Ha a teljes térfogatot vesszük ($x_1 = a$), akkor:

$$V(0, a) = \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{2}{9}\right) ac^2.$$

*4. Az origóból $OD = c$ sugárral szerkesztett *gömb*öt a 145. ábrán látható módon egy *parallelepipedon*nal metszünk; alaplapjának oldalai: $\overline{OB} = b$ és $\overline{OA} = a$. Meghatározandó e *negyedgömbboltozat* térfogata!



145. ábra

Esetünkben $z(x) = \sqrt{c^2 - x^2}$, $y(x) = b$. Tehát egy x abszcisszájú metszet területe:

$$T(x) = \frac{b}{2}\sqrt{c^2 - b^2 - x^2} +$$

$$+ \frac{c^2 - x^2}{2} \arcsin\frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}}.$$

Elvégezve az integrálást, nyerjük:

$$V(0, x_1) = \frac{1}{3} b x_1 \sqrt{c^2 - b^2 - x_1^2} + \frac{1}{6} x_1 (3c^2 - a^2) \arcsin\frac{b}{\sqrt{(c^2 - x_1^2)}} +$$

$$+ \frac{b}{6}(3c^2 - b^2) \arcsin\frac{x_1}{\sqrt{c^2 - b^2}} - \frac{c^3}{3} \arcsin\frac{b}{\sqrt{(c^2 - x_1^2)(c^2 - b^2)}} x_1.$$

Ha $x_1 = a$ és bevezetjük a

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \sin\beta = \frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad \sin\gamma = \frac{ab}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}$$

jelöléseket, akkor:

$$V(0, a) = \frac{ab}{3}\sqrt{c^2 - a^2 - b^2} + \frac{a}{6}(3c^2 - a^2)\alpha + \frac{b}{6}(3c^2 - b^2)\beta - \frac{c^3\gamma}{3}.$$

Azon esetben, ha $OC = OD$, kapjuk végül:

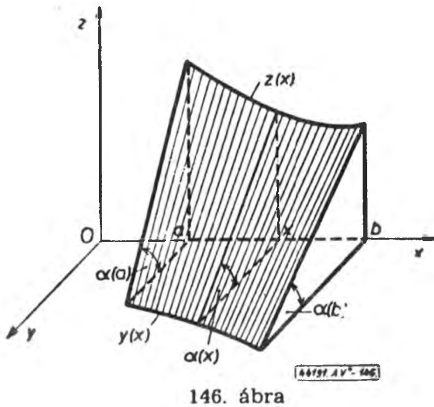
$$V_a = \frac{\pi}{12}[a^3 + b^3 + (a + b)^3 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)^3}].$$

c) Henger- és vonalfelülettel kapcsolatos számítások

α) Vonalfelület alatti térrész

A felületet az (x, y) síkbeli $y = y(x)$ egyenletű görbe, valamint az (x, z) síkbeli $z = z(x)$ egyenletű görbe pontjait az (y, z) *síkkal párhuzamosan* összekötő *egyenesek alkotják*. E görbe felület, valamint az (x, z) és (x, y) sík határolta testnek az x tengelyre *merőleges keresztmetszete*, tetszőleges x helyen egy $z(x)$ és $y(x)$ befogójú és $\alpha(x) = \operatorname{arctg} \frac{z(x)}{y(x)} \neq$ const. szögű derékszögű háromszög (l. a 146. ábrát); területe nyilván:

$$T(x) = \frac{1}{2} z(x) y(x).$$



146. ábra

Az említett test $a \leq x \leq b$ szakaszmenti darabjának *térfogata* tehát:

$$V(a, b) = \frac{1}{2} \int_a^b z(x)\,(yx)\, dx.$$

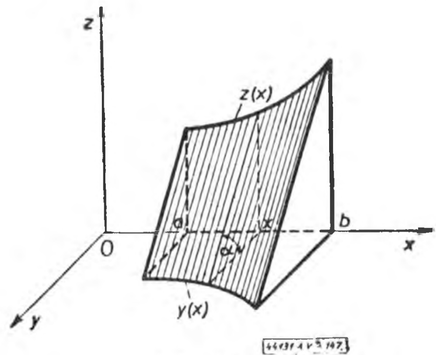
β) Ferde hengerfelület alatti térrész

Az előbbivel rokon eset. *A* görbe *felületet most* az (x, z) síkbeli $y = y(x)$ egyenletű görbére illeszkedő, *az (y, z) síkkal párhuzamos és az (x, y) síkhoz állandó α szög alatt hajló egyenesek alkotják*. Ezért most $z(x) = \operatorname{tg} \alpha \cdot y(x)$, azaz $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{z(x)}{y(x)} =$ const. Ennélfogva ez esetben (147. ábra):

$$T(x) = \frac{1}{2} y(x)\, z(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \cdot y^2(x)$$

és vele a *térfogat:*

$$V(a, b) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \int_a^b y^2(x)\, dx.$$



147. ábra

γ) Két merőlegesen metsződő hengerfelület közti térrész

Legyen adva *egy $z = z(x)$ egyenletű* (az y tengellyel párhuzamos alkotójú) *és egy $y = y(x)$ egyenletű* (a z tengellyel párhuzamos alkotójú) egyenes *hengerfelület*. E két görbe felület, valamint az (x, y) és az (x, z) sík határolta testnek az x tengelyre merőleges *keresztmetszete* tetszőleges x helyen egy $y(x)$ és $z(x)$ élű derékszögű négyszög; területe nyilván (148. ábra):

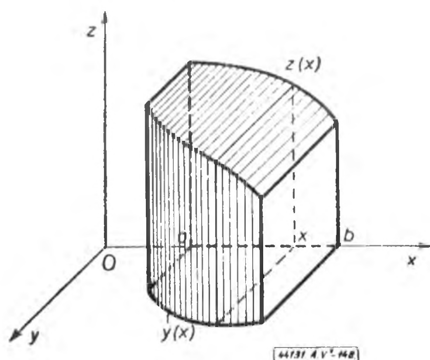
$$T(x) = y(x)\, z(x).$$

Az említett test $a \leq x \leq b$ szakaszmenti darabjának *térfogata* tehát:

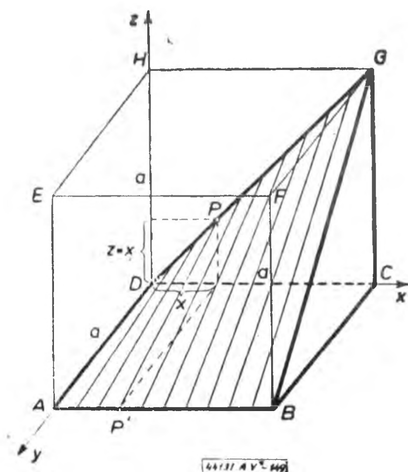
$$V(a, b) = \int_a^b y(x)\, z(x)\, dx\,.$$

Példák és feladatok

α | 1. Húzzuk meg egy a élű *kocka* egyik *lapátlóját* és annak minden P pontját kössük össze az egyik szemben lévő alapélnek egy-egy P' pontjával, melyre a PP' egyenes párhuzamos a kocka $BCFG$ lapjával. Ezek az összekötő egyenesek egy vonalfelületet alkotnak, amely a kockát két részre bontja. Határozzuk meg az alsó rész térfogatát (149. ábra). A koordinátarendszer kezdőpontját helyezzük a D csúcsba. Legyen $AP' = x$. Mivel $DGC \sphericalangle\ 45°$, AP' egyben egyenlő a P pont magasságával.



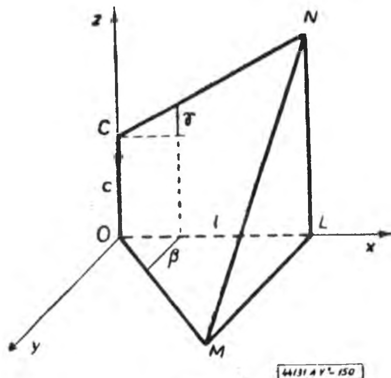
148. ábra



149. ábra

Esetünkben: $y(x) = a$ és $z(x) = x$.
Így a vonalfelület alatti térrész köbtartalma:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^a ax dx = \frac{a}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^3}{4}\,.$$



150. ábra

2. Az (x, y) vízszintes síkban adva van egy, az origón átmenő OM egyenes, az (x, z) függőleges síkban pedig egy másik egyenes, amely azonban nem megy át az origón (CN). Az OM és CN egyenes pontjai az (y, z) síkkal párhuzamos egyenesekkel vannak összekötve, és így — mint ismeretes — *hiperbolikus paraboloid* felületet alkotnak. Mekkora az $OLMNCO$ test térfogata (150. ábra)?

E vonalfelület vezérgörbéi:

$$OM: y = \beta x, \quad CN: z = c + \gamma x \quad \text{és} \quad OL = l,$$

ahol $\beta, \gamma, c > 0$.

A szóbanforgó test térfogata tehát:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^l y(x)\,z(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l \beta x\,(c+\gamma x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l \beta c\,x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \beta\gamma x^2\,dx.$$

Az integrálást elvégezve nyerjük:

$$V = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\beta c x^2 + \frac{1}{3}\beta\gamma x^3\right]_0^l = \frac{1}{2}\beta x^2\left[\frac{c}{2} + \frac{\gamma x}{3}\right]_0^l = \frac{1}{2}\beta l^2\left[\frac{c}{2} + \frac{\gamma l}{3}\right].$$

Eredményünk *Simpson*-szabályai igazolható:

$$V = \frac{l}{6}(F_0 + 4F_1 + F_2).$$

Esetünkben az $x = 0$ abszcisszájú $\overline{OC}$ él „területe" $F_0 = 0$, az $x_1 = \frac{l}{2}$ abszcisszájú háromszögé:

$$F_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta l}{2}\left(\frac{\gamma l}{2} + c\right)\right],$$

végül az $x_2 = l$ abszcisszájú háromszögé:

$$F_2 = \frac{1}{2}\left[\beta l\,(\gamma l + c\right].$$

Ezekkel:

$$V = l\left(\frac{2}{3}F_1 + \frac{1}{6}F_2\right) = \frac{l}{12}\left[\beta l(\gamma l + 2c) + \beta l(\gamma l + c)\right] = \frac{\beta l^2}{2}\left(\frac{\gamma l}{3} + \frac{c}{2}\right), \quad \text{q. e. d.}$$

3. Lásd a b) β) 1. példát! Mekkora az ott közölt test OBC és LMN közötti szeletének térfogata (141. ábra)? ($\overline{OL} = x_1$).

Egy tetszőleges x helyen vett metszet területe:

$$\frac{1}{2}y(x)\,z(x) = F(x).$$

A vonalfelület két vezérgörbéje:

$$y(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{és} \quad z(x) = c.$$

Ezekkel:

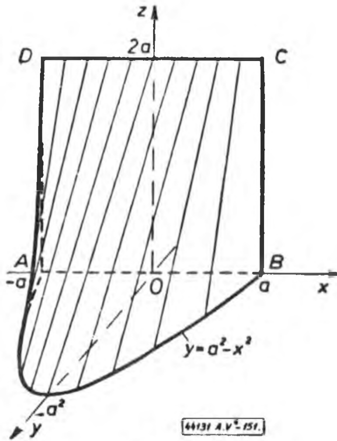
$$V(0, x_1) = \frac{1}{2}\int_0^{x_1} y(x)\,z(x)\,dx = \int_0^{x_1} \frac{bc}{2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Az integrálást pl. $\frac{x}{a} = \sin u$ helyettesítéssel elvégezve, eredményül kapjuk:

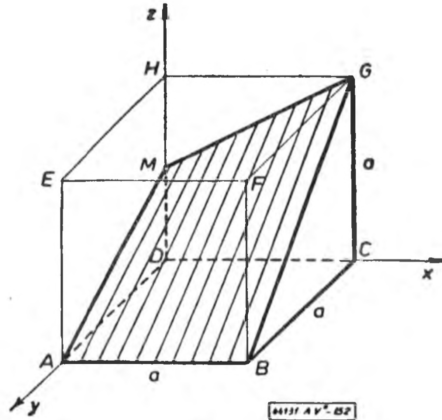
$$V(0, x_1) = \frac{bc}{4}\left[\frac{x_1}{a}\sqrt{a^2 - x_1^2} + a \arcsin\frac{x_1}{a}\right],$$

mi éppen *fele a körülírt elliptikus henger térfogatának.*

4. Az (x, y) síkban megrajzoljuk az $y = a^2 - x^2$ *parabolát*, az $x = a$ és $x = -a$ abszcisszájú pontjait összekötve, s itt az (x, y) síkra merőlegesen egy $2a$ élű négyzetet emelünk (151. ábra). E négyzet $\overline{DC}$ oldalának minden egyes pontját a parabola $\widehat{AB}$ ívének egy-egy pontjával összekötjük oly módon, hogy az összekötő vonalak merőlegesek $\overline{DC}$-re. Meghatározandó az összekötő vonalak, az (x, y) sík és az $ABCD$ négyzet határolta test térfogata.



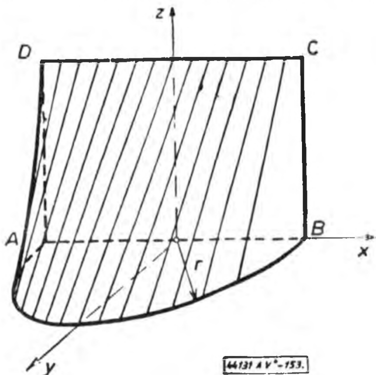
151. ábra



152. ábra

5. Egy a élű *kocka DH* élének M felezőpontját kössük össze a szemben lévő G csúcscsal. Az így adódó MG egyenes szakasz minden egyes pontját kössük össze az AB él egy-egy pontjával, oly módon, hogy az összekötő egyenesek merőlegesek legyenek AB-re. Az összekötő vonalak alkotta felület a kockát két részre osztja (152. ábra). Határozzuk meg az alsó rész térfogatát.

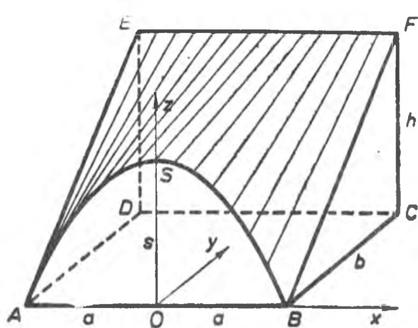
6. Egy *félkörlap* $AB = 2r$ átmérőjéhez egy, a félkörlap síkjára merőleges helyzetű $ABCD$ *négyzetet* illesztünk. A négyzet DC élének minden egyes pontját oly módon kötjük össze a félkörív egy-egy pontjával, hogy az összekötő vonalak merőlegesek legyenek DC-re (153. ábra). Határozzuk meg az összekötő vonalak, a négyzet és a körlap határolta test térfogatát.



153. ábra

*7. A vízszintes helyzetű *ABCDtéglalap A* és *B* pontjához egy függőleges síkú $\widehat{ASB}$ *parabolaívet*, a DC élhez pedig egy függőleges síkú *DCEF téglalapot* illesztünk. (S a parabola csúcsa. Ez az AB távolság O felezőpontja felett van.) Az EF oldal minden egyes pontját oly módon kötjük össze a parabolaív egy-egy pontjával, hogy az összekötő vonalak EF-re merőlegesek legyenek (154. ábra). Határozzuk meg az összekötő vonalak, a parabola síkja, az $ABCD$ és $DCEF$ téglalapok, valamint a BCF és ADE háromszögek határolta test térfogatát. ($AB = 2a$;

$BC = b$; $OS = s$; $CF = h$. Vegyük az OB, illetve OS egyeneseket x és z tengelyekül. és írjuk fel a parabola egyenletét.)



154. ábra

β 1. Mekkora az $y = x^2$ vezérgörbéjű, $\gamma = 45°$-os hajlásszögű ferde hengerfelület, valamint az $x = 0$, $x = x_1$ (majd $x = a$) és az $y = 0$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogata?

$$V(0, x_1) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma \int_0^{x_1} y^2(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \int_0^{x_1} (x^2)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{x_1} x^4\, dx = \frac{x_1^5}{10}.$$

Ebből:

$$V(0, a) = \frac{a^5}{10}.$$

2. Hasonló a feladat $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ vezérgörbe és $\gamma = 45°$ esetén!

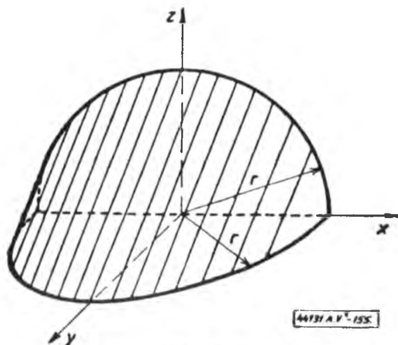
$$V(0, x_1) = \frac{1}{2} 1 \int_0^{x_1} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \left[a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - x^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[a^2 x_1 - \frac{9}{5} a^{\frac{4}{3}} x_1^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} a^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} x_1^3\right]$$

Ebből:

$$V(0, a) = \frac{8}{105} a^3.$$

3. Az (x, y) síkban adott r sugarú kört átforgatva az (x, z) síkba, egy *negyedgömb* keletkezik. Hányadrésze a negyedgömb térfogatának azon test térfogata, amit a nyomvonalaknak az (y, z) síkkal párhuzamos egyenesekkel való összekötésével nyerünk?



155. ábra

Nyilván félkör vezérgörbéjű, $\gamma = \frac{\pi}{4}$ hajlásszögű ferde hengerről van szó 155. ábra). A térfogatok tehát:

$$V_{\text{henge.}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = 2\left[\frac{1}{2} r^2 x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{2}{3} r^3, \qquad V_{\text{gömb}} = \frac{r^3 \pi}{3}.$$

A kettő aránya:

$$k = \frac{\pi}{2}.$$

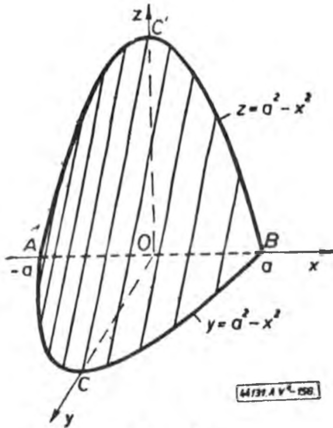
4. Az 1. és 2.-hoz hasonló a feladat *kardioid*-vezérgörbe esetén; $\gamma = 45°$. Ekkor a határok $-3a$ és x_1, majd $-3a$ és $+a$.

Ezekkel:

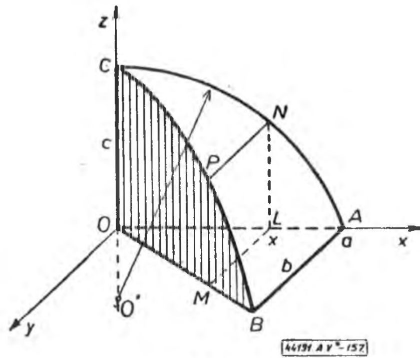
$$V(-3a, x_1) = \frac{1}{2}\left[18a^3 + 3a^2x_1 - \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{2}{3}\sqrt{(3a^2 - 2ax_1)^3}\right],$$

$$V(-3a, a) = 10a^3.$$

5. Az $y = a^2 - x^2$ *parabola* $x = a$ és $x = -a$ abszcisszájú A és B pontjaihoz illeszszünk a 156. ábrán látható módon egy, az (x, y) síkra merőleges síkban fekvő, az $\widehat{ACB}$ parabolaívvel egybevágó $\widehat{AC'B}$ parabolaívet. Kössük össze a két parabolaív pontjait oly módon, hogy az összekötő egyenesek merőlegesek legyenek az AB egyenesre. Határozzuk meg a ferde hengerfelület és a parabolák síkjai határolta test térfogatát.



156. ábra



157. ábra

γ) 1. Az (x, y) síkban adva van egy derékszögű háromszög, amelynek befogói $\overline{OA} = a$, $\overline{AB} = b$, az (x, z) síkban pedig egy körív, mely átmegy az A ponton, valamint a z tengely $\overline{OC} = c$ magasságban lévő C pontján; O' középpontja a $\overline{CO}$ meghosszabbításán fekszik (157. ábra). Meghatározandó azon éktest *(prizma)* köbtartalma, melyet felülről a körív vezérgörbéjű henger határol és amelynek alkotói az y tengellyel párhuzamos egyenesek.

Esetünkben a két merőlegesen metsződő henger vezérgörbéje:

$$y(x) = \frac{b}{a}x, \quad z(x) = \sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - a^2}, \quad \text{ahol} \quad r = \frac{a^2 + c^2}{2c},$$

mert:

$$(\overline{OO'})^2 = r^2 - a^2 \quad \text{és} \quad \overline{OO'} = r - c.$$

A szóbanforgó test térfogata tehát:

$$V(0, x_1) = \int_0^{x} y(x)\, z(x)\, dx = \int_0^{x_1} \frac{b}{a}\, x \left[\sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - a^2}\right] dx =$$

$$= \frac{b}{a} \left\{ \int_0^{x_1} x \sqrt{r^2 - x^2}\, dx - \sqrt{r^2 - a^2} \int_0^{x_1} x\, dx \right\}.$$

Elemi integrálás után (az 1. tagot helyettesítéssel, a 2.-at hatványként) kapjuk:

$$(0, x_1) = \frac{b}{a} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{(r^2 - x_1^2)^3} - \frac{1}{2} x_1^2 \sqrt{r^2 - a^2} \right].$$

Ha $x = a$ és r-t is kifejezzük a fenti módon, akkor nyerjük egy boltozat térfogatát:

$$V(0, a) = \frac{b}{6a} \left[2 \left(\frac{a^2 + c^2}{2c} \right)^3 - \frac{6}{3} \left(\sqrt{\left(\frac{a^2 + c^2}{2c} \right)^2 - a^2} \right)^3 - \frac{6}{2} a^2 \sqrt{\left(\frac{a^2 + c^2}{2c} \right)^2 - a^2} \right].$$

Összevonva:

$$V(0, a) = \frac{bc\,(3a^2 + c^2)}{12a}.$$

2. Legyen az előző példában szereplő boltozat (x, z) síkban lévő nyomvonala kör helyett egy $OA = a$ és $\overline{OC} = c$ féltengelyű *ellipszis*. Mekkora lesz így a térfogata?

$$V(0, x_1) = \int_0^{x_1} yz\,dx, \quad \text{ahol} \quad y = \frac{b}{a} x,$$

továbbá:

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

illetőleg:

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Ezek felhasználásával:

$$V(0, x_1) = \int_0^{x_1} \frac{bc}{a}\, x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx.$$

Szorozzuk $\dfrac{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$-tel, majd két tagra bontva integráljuk. Így nyerjük:

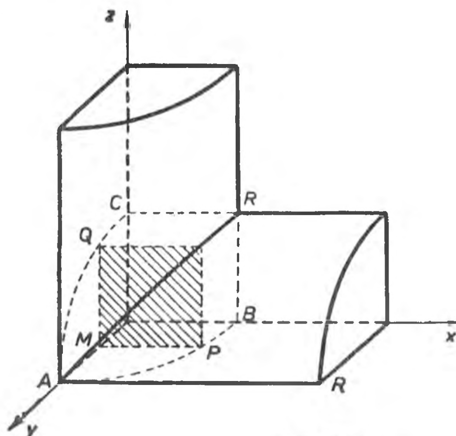
$$V(0, x_1) = \frac{bc}{a} \left\{ a \left[\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} + \frac{\left(\frac{x_1}{a}\right)^3}{3}\, a \right] - \frac{x_1}{a} + \operatorname{arctg} \frac{x_1}{a} \frac{4}{\pi} \right\}.$$

Ha $x_1 = a$, akkor:

$$V(0, a) = \frac{abc}{3}.$$

3. Két egyenlő sugarú körhenger tengelye derékszögben metszi egymást. Határozzuk meg a két henger közös részének térfogatát.

(A 158. ábrán a közös rész $\frac{1}{8}$ része látható. Vizsgáljuk a közös résznek a két henger tengelyével párhuzamos síkmetszeteit!)



158. ábra

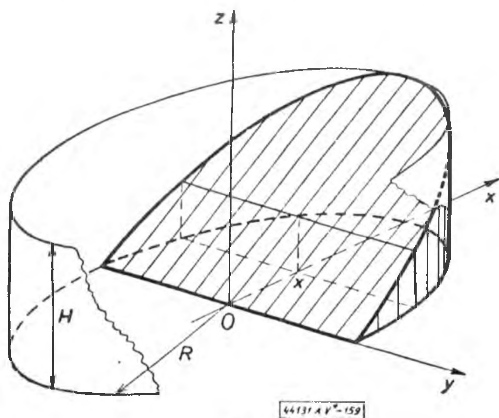
d) Egyéb esetek

E testek keresztmetszete valamilyen ismert területű síkidom, pl. derékszögű négyszög, háromszög, trapéz, szabályos sokszög stb. Rendszerezésük nehéz. Ehelyett a példákra utalunk.

Példák és feladatok

1. Meghatározandó azon test köbtartalma, amelyet az *egyenes körhenger*ből az alapkör átmérőjén átmenő ferde sík kimetsz (159. ábra). Legyen pl. $R = 10$ cm és $H = 6$ cm.

A koordinátarendszer kezdőpontja legyen az alapkör középpontja. A $T(x)$ itt közvetlenül felírható, lévén a keresztmetszet derékszögű parallelogramma, melynek alapja az alapkör húrja, magassága $\frac{H}{R}x$; így:



159. ábra

$$T(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,\frac{H}{R}\,x.$$

A térfogat tehát:

$$V = \frac{H}{R}\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{H}{R}\left[\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^3\right]_R^0 = \frac{2}{3}\frac{H}{R}R^3 = \frac{2HR^2}{3}.$$

Ha $R = 10$ cm és $H = 6$ cm, akkor:

$$V = \frac{2 \cdot 100 \cdot 6}{3} = 400\ \text{cm}^3.$$

2. Az $y = \sqrt{x}$ vezérgörbéjű *parabolikus hengert* két síkkal metszük. Az egyik sík merőleges az alkotókra, továbbá a két sík metszésvonala merőleges a parabola tengelyére (160. ábra). Fejezzük ki e test térfogatát az ábrán jelölt méretek segítségével. Adjuk meg az eredményt az $a = 8$ cm, $H = 16$ cm, $h = 6$ cm esetre is!

A $T(x)$ terület ismét derékszögű négyszög:

$$T(x) = 2y\left(h - \frac{h}{H}x\right) = 2\sqrt{x}\left(h - \frac{h}{H}x\right).$$

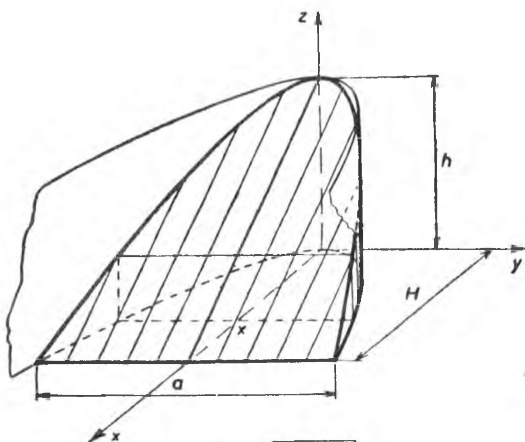
Ezzel:

$$V = 2h\int_0^H \sqrt{x}\,dx - 2\frac{h}{H}\int_0^H x^{\frac{3}{2}}\,dx = 2h\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\frac{1}{H}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^H =$$

$$= 2h\left[\frac{2}{3}H^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}H^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2h}{15}\left[(10-6)H^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8h}{15}H\sqrt{H} = \frac{4}{15}hHa.$$

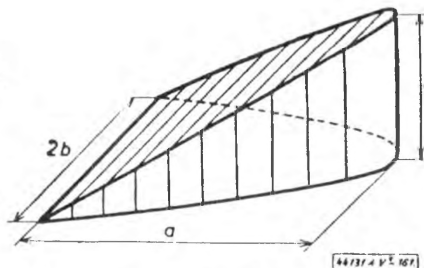
Az adott számértékek mellett:

$$V = \frac{4}{15}\cdot 6\cdot 16\cdot 8 = 204{,}8\ \text{cm}^3.$$



160. ábra

3. Messük az *elliptikus hengert* egy, a kis tengelyén átmenő ferde síkkal, és határozzuk meg az így nyert test térfogatát (161. ábra); $a = 10$, $2b = 8$, $H = 5$ cm.



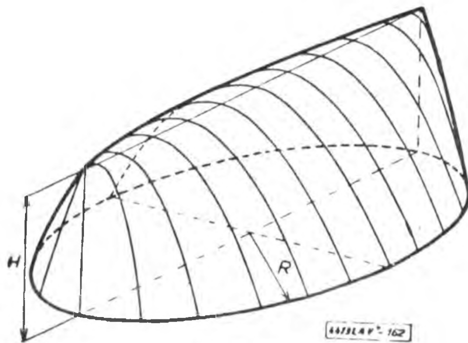
161. ábra

4. Az R sugarú *kör* egy adott iránnyal párhuzamos húrjaira illesszünk H magasságú *szimmetrikus parabolaíveket* (162. ábra). A parabolák síkja merőleges a kör síkjára. Határozzuk meg az ily módon nyert test köbtartalmát. (A szimmetrikus parabola-szegmensek területe $\frac{2}{3}ah$-val egyenlő, ahol a a szegmens alapja és h a magassága.)

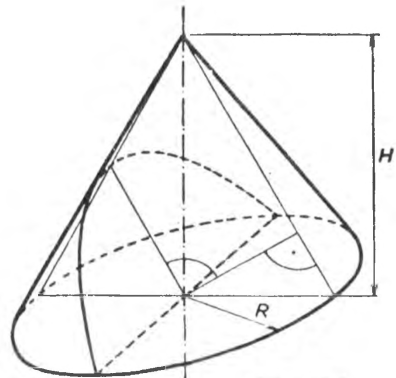
5. Osszuk két részre az R sugarú és H magasságú *körkúpot* egy, az alap középpontján átmenő, az alkotóval párhuzamos síkkal (163. ábra). Határozzuk meg a kúp két részének köbtartalmát. (A kúpnak egy alkotóval párhuzamos síkmetszete parabola. — Lásd az az előző feladathoz adott útmutatást!)

6. Illesszünk az a sugarú *kör* egy adott iránnyal párhuzamos húrjaira ezekkel egyenlő *oldalú négyzeteket*. A kör síkja e négyzetek egyik oldalpárját merőlegesen felezi (164. ábra). Meghatározandó az ily módon képzett test V_1 térfogata.

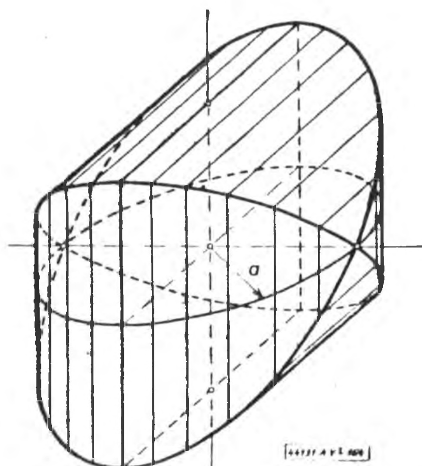
7. Illesszünk az a sugarú *kör* egy adott iránnyal párhuzamos húrjaira ezekkel egyenlő *átlójú*, a kör síkjára merőleges *négyzeteket* (165. ábra). Mutassuk ki, hogy az így nyert test V_2 térfogata éppen fele az előbbinek.



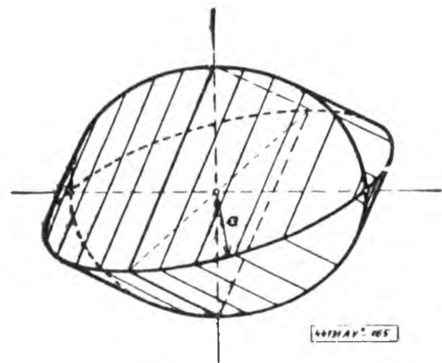
162. ábra



163. ábra

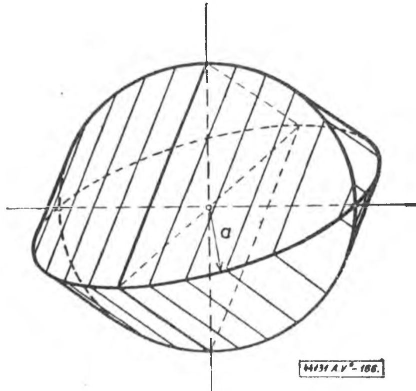


164. ábra



165. ábra

8. Illesszünk az a sugarú vízszintes síkbeli *kör* adott irányú húrjaira felfelé és lefelé e húrokkal egyenlő *oldalú szabályos háromszögeket* (166. ábra). Mutassuk ki, hogy az így nyert test térfogata:



166. ábra

$$V_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} V_1 .$$

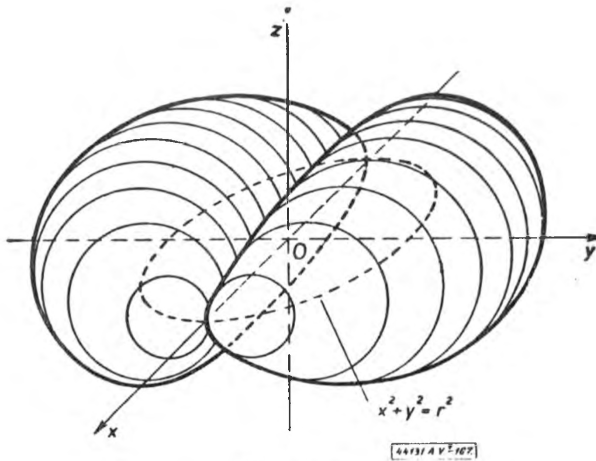
9. Képezzünk testet olyan *körök* segítségével, melyek az x tengelyt érintik, síkjuk erre merőleges, középpontjuk pedig az $x^2 + y^2 = r^2$ *kör*ön van (167. ábra). Mekkora e test térfogata?

10. Adva van két *ferde körhenger*, közös H magassággal, közös R sugarú, egybeeső fedőlappal és érintkező alaplappal, a 168. ábrán látható módon. Mekkora a közös rész térfogata?

*11. Az adott *elliptikus paraboloid* egyenlete (169. ábra):

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} .$$

E paraboloidot két síkkal metsszük; ezek egyike $OL = x_1$ távolságban van a vele párhuzamos (y, z) síktól, a másik pedig $\overline{OC} = c$ távolságban van a vele párhuzamos (x, y) síktól.



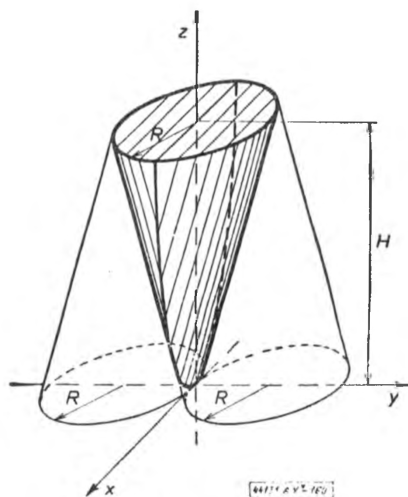
167. ábra

Keresendő ezen síkok, az elliptikus paraboloidfelület és az (y, z) sík által határolt térrész térfogata!

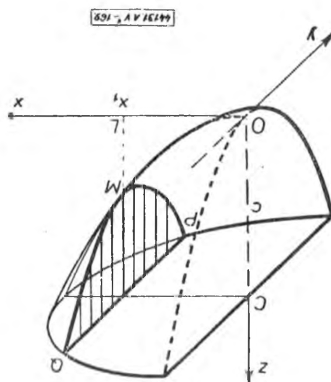
Az x abszcisszájú függélyes síkban nyert parabolaszelet területe:

$$T(x) = \frac{2}{3} \cdot 2b \sqrt{2c - \frac{x^2}{a}} \cdot \left(c - \frac{x^2}{a}\right) .$$

Ezt integrálva $[0, x_1]$, majd $[0, \sqrt{2ac}]$ szakaszon, nyerjük:



168. ábra



169. ábra

$$V(0, x_1) = \sqrt{ab}\left[c^2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{2ac}} + \frac{x(5ac - x^2)}{6a^2}\sqrt{2ac - x^2}\right];$$

$$V(0, \sqrt{2ac}) = \frac{c^2\pi}{2}\sqrt{ab}\,.$$

6. §. FELSZÍNSZÁMÍTÁS

a) Általános megjegyzések

A felszínszámítási feladatok általában kétszeres integrálást igényelnek. Az ilyen feladatok tárgyalása a felszín általános definíciójával együtt az A. VII., B. II. és B. III. kötetekben fog sorra kerülni. *Itt csak néhány* (főleg az ívhosszal kapcsolatos) *speciális esetet vizsgálunk.*

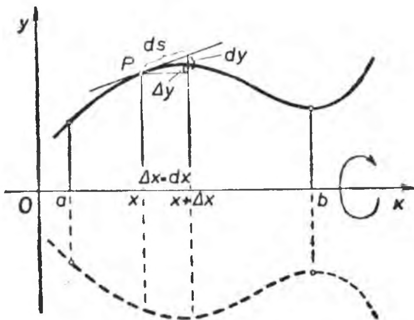
b) Az ívhosszal kapcsolatos esetek

α) Forgásfelület felszínszámítása

α_1) Az említett speciális esetek közt *a legfontosabb.* Éppen ezért megmutatjuk, hogy itt *a felszín differenciálja* valóban *az ívhossz differenciáljára támaszkodik.*

α_2) Abból indulunk ki, hogy: *a)* a felszín *additív* tulajdonságú, *b)* a meridiángörbébe beírt, illetve köréírt poligon forgatása útján nyert felület felszíne *kisebb*, illetve *nagyobb*, mint az adott forgásfelület felszíne.

α_3) Az x tengely körüli forgatással képzett forgásfelület $[a, x]$ szakaszra vonatkozó darabja $F(a, x)$ felületi mérőszámának, mint az x változó felső határ függvényének *differenciál*ja az $[x, x + \Delta x]$ szakaszon így nyerhető (a 170. ábrabeli esetben):



170. ábra

$$\frac{2\pi y + 2\pi(y + \Delta y)}{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \Delta F <$$

$$< \frac{2\pi y + 2\pi(y + dy)}{2}\sqrt{\Delta x^2 + dy^2}\,.$$

Osztva $2\pi y\sqrt{\Delta x^2 + dy^2}$-tel, majd $\Delta x = dx \to 0$ határátmenetre térve, kapjuk:

$$\frac{y + \Delta y}{y}\,\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + dy^2}} < \frac{\Delta F}{2\pi y\sqrt{\Delta x^2 + dy^2}} < \frac{y + dy}{y},$$

majd

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F}{\sqrt{\Delta x^2 + dy^2}}\,\frac{1}{2\pi y} = \frac{dF}{ds}\,\frac{1}{2\pi y} = 1\,.$$

Ebből *a keresett differenciál*:

$$dF = 2\pi y\, ds = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\,dx\,,$$

mely láthatóan *az ívhossz-differenciál $2\pi y$-szorosa.*

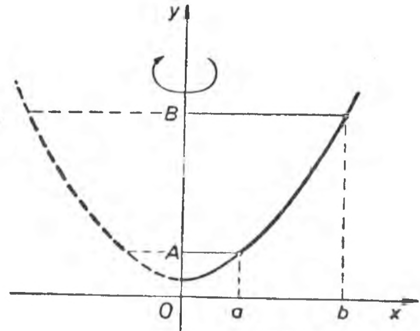
α_4) Az említett *forgásfelület* $a \leq x \leq b$ szakaszmenti darabjának *felszíne* tehát:

$$F_x(a,b) = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx\,,$$

a *változó felső határú* $a \leq x \leq x_1$ szakaszra vonatkozólag pedig:

$$F_x(a, x_1) = 2\pi \int_a^{x_1} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx\,.$$

Ha az y tengely körül forgatunk, akkor (171. ábra):



171. ábra

$$F_y(a, b) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

vagy az $x = x(y)$ inverz függvény birtokában:

$$F_y(A, B) = 2\pi \int_A^B x(y)\sqrt{1+x'^2(y)}\,dy\,,$$

ahol $A = y(a)$, $B = y(b)$.

*α_5) Megkívánjuk, hogy a felület a mondott szakaszon *folytonos* és legalább részszakaszonként *sima* legyen. Ilyenkor az integrálandó részszakaszonként fo ytonos, vagyis ezeken van primitív függvénye. E primitív függvények azonban elég ritkán adhatók meg elemi függvényekkel, zárt alakban, tekintettel az *irracionális integrálandókra*.

α_6) Ha a meridiángörbe $x = x(t)$, $y = y(t)$ *paraméteres egyenletrendszerével* van megadva, akkor *képletünk* így alakul:

$$F_x(\gamma, \delta) = 2\pi \int_\gamma^\delta y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}\,dt\,, \quad \gamma < \delta\,.$$

α_7) A görbe $r = r(\varphi)$ *polárkoordinátás megadása* esetén pedig:

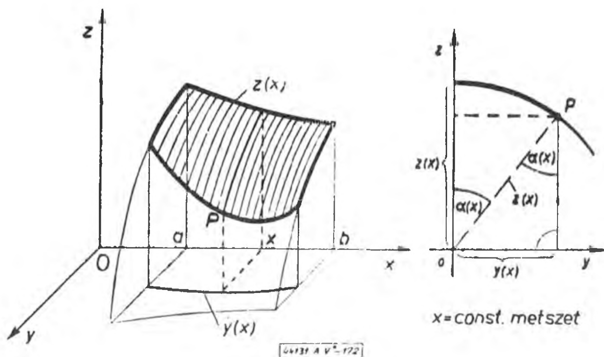
$$F_x(\alpha, \beta) = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+\dot{r}^2(\varphi)}\,d\varphi\,. \quad \alpha < \beta.$$

Ezeknél is megkívánjuk a legalább részszakaszonként *folytonos* integrálandót.

***β) Forgásfelület és egyenes hengerfelület áthatása**

β_1) Keresendő az (x, z) síkban adott $z = z(x)$ *meridiángörbe x tengely körüli forgatásával képzett forgásfelület* azon darabjának felszíne, amelyet belőle az (x, z) sík, az (x, y) sík és az $y = y(x)$ *egyenletű* (a z tengellyel párhuzamos alkotójú) *egyenes hengerfelület* kimetsz az $a \leq x \leq b$ szakaszon.

E feladat az előbbivel rokon. Ott minden x abszcisszájú keresztmetszetben a $ds(x) = \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ ívelemet $y(x)$ sugáron 2π teljes szöggel forgattuk körül, itt viszont a



172. ábra

$ds(x) = \sqrt{1 + z'^2(x)}\,dx$ *ívelemet* $z(x)$ *sugáron* csak $\alpha(x) = \arcsin \frac{y(x)}{z(x)} < 2\pi$, $\alpha(x) \neq \neq \text{const}$ *szöggel forgatjuk el* (172. ábra).

β_2) Ennek megfelelően a felületelem:

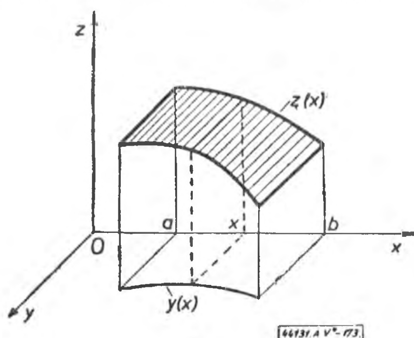
$$dF = z(x)\sqrt{1 + z'^2(x)} \arcsin \frac{y(x)}{z(x)}\,dx\,,$$

a kérdezett *felszín* pedig:

$$F(a, b) = \int_a^b z(x)\sqrt{1 + z'^2(x)} \arcsin \frac{y(x)}{z(x)}\,dx\,.$$

γ) **Egyenes hengerfelületek (merőleges) áthatása**

γ_1) Keresendő a $z = z(x)$ *egyenletű* (az y tengellyel párhuzamos alkotójú) *egyenes hengerfelület* azon darabjának felszíne, amelyet belőle az (x, z) sík, valamint az $y = y(x)$ *egyenletű* (a z tengellyel párhuzamos alkotójú) *egyenes henger* kimetsz az $a \leq x \leq b$ szakaszon (173. ábra).



173. ábra

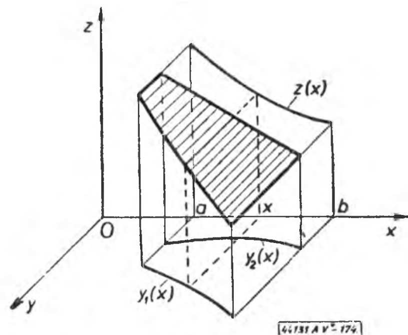
γ_2) A *felületelem* itt nyilván:

$$dF(x) = y(x)\sqrt{1 + z'^2(x)}\,dx = y(x)\,ds(x),$$

amely úgy adódik, mintha a vezérgörbe $ds(x)$ íveleme mentén az alkotóhossz állandóan $y(x)$ lenne.

γ_3) Ily módon a kérdezett *felszín*:

$$F(a, b) = \int_a^b y(x)\sqrt{1 + z'^2(x)}\,dx\,.$$



174. ábra

γ_4) E mérőszám *pozitív*, ha a felületdarab az (x, z) síktól jobbra van; *negatív*, ha balra van. Ha pedig az $y = y(x)$ görbe az x tengelyt metszi, azaz a felületdarab az (x, z) sík két oldalán helyezkedik el, akkor a pozitív és negatív mérőszámú részek külön-külön számítandók.

γ_5) Ha a $z = z(x)$ *hengerfelület* azon darabjának felszínét keressük, amelyet belőle az $y_1 = y_1(x)$ és $y_2 = y_2(x)$ *hengerfelület* kimetsz [feltételezve, hogy $y_1(x) > y_2(x)$] az $a \leq \leq x \leq b$ szakaszon, akkor beláthatóan (174. ábra):

$$F(a, b) = F_1(a, b) - F_2(a, b) = \int_a^b y_1(x)\sqrt{1 + z'^2(x)}\,dx - \int_a^b y_2(x)\sqrt{1 + z'^2(x)}\,dx =$$

$$= \int_a^b [y_1(x) - y_2(x)]\sqrt{1 + z'^2(x)}\,dx.$$

Ha a nevezett szakaszon az $y_1(x)$ és $y_2(x)$ görbe egymást metszi, akkor a megfelelő felületrészek egyenként számítandók.

Példák és feladatok

α 1. Határozzuk meg az $y = \frac{r}{m}x$ egyenes x tengely körüli megforgatásával nyert *körkúpfelület* felszínét a $[0, m]$ szakaszon.

Itt:

$$y' = \frac{r}{m}, \quad \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}},$$

és így:

$$F = 2\pi\int_0^m \frac{r}{m}x\sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}}\,dx = \pi\frac{r}{m}\sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2}}\cdot[x^2]_0^m = \pi r\sqrt{r^2 + m^2} = \frac{Kl}{2},$$

ahol $K = 2r\pi$ az alapkör kerülete és $l = \sqrt{r^2 + m^2}$ a kúpalkotó hossza.

2. Meghatározandó az $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ félkör x tengely körüli megforgatása által nyert *gömb* felszíne.

Most:

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + {}^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}.$$

Ily módon

$$F_x = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\cdot\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2 + x^2}\,dx =$$

$$= 4\pi r\int_0^r dx = 4r\pi\,[x]_0^r = 4r^2\pi.$$

3. Mekkora az $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ körvonalnak az x tengely körüli megforgatásával keletkező *tóruszfelület* felszíne?

Most

$$v = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}, \quad v' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad v\sqrt{1 + v'^2} =$$

$$= (b \pm \sqrt{a^2 - x^2})\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = (b \pm \sqrt{a^2 - x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= a\left[\frac{b}{\sqrt{a^2 - x^2}} \pm 1\right] = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ezzel:

$$F = 2 \cdot 2\pi \int\limits_{x=0}^{a} \frac{2badx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8ab\pi \left[\arcsin \frac{x}{a}\right]_0^a = 8ab\pi \cdot \frac{\pi}{2} = 4ab\pi^2 = 2a\pi \cdot 2b\pi$$

4. Mekkora az $y = \operatorname{ch} x$ görbe x tengely körüli megforgatásával keletkező *katenoid* felszíne, $F(-a, a) = ?$

Itt $y' = \operatorname{sh} x$ és vele:

$$F = 2\pi \int\limits_{-a}^{+a} \operatorname{ch} x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = 2\pi \int\limits_{-a}^{+a} \operatorname{ch}^2 x\, dx = 2\pi \int\limits_{-a}^{+a} \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}\, dx =$$

$$= \pi\left[x + \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}\right]_{-a}^{+a} = 2\pi\left(a + \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{2}\right).$$

5. Mekkora az $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ egyenletű *asztrois* görbének az x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület felszíne?

Itt:

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y' = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}, \quad y\sqrt{1 + y'^2} = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} =$$

$$= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Ezzel:

$$F_x(0, a) = 2 \cdot 2\pi \int\limits_{x=0}^{a} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx.$$

Helyettesítés: $x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cos\varphi, \quad \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq 0.$ Így:

$$F_x(0, a) = -4\pi \cdot 3a^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4\varphi \cos\varphi\, d\varphi = +12a^2\pi\left[\frac{\sin^5\varphi}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}a^2\pi;$$

$$F_x(0, \varphi_1) = \frac{12}{5}\pi a^2 \sin^5\varphi_1.$$

6. $y = x^3; \quad F_x(0, 1) = ?$

$$y' = 3x^2, \quad y\sqrt{1 + y'^2} = x^3\sqrt{1 + 9x^4};$$

$$F_x = \frac{2\pi}{36}\int_{x=0}^{1} 36\,x^3\sqrt{1 + 9x^4}\,dx = \frac{\pi}{18}\int_{u=1}^{10}\sqrt{u}\,du = \frac{2\pi}{3\cdot 18}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{\pi}{27}\,[\sqrt{10^3} - 1]\,.$$

7. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *ellipszisnek* az x tengely körüli megforgatásával képzett ú. n. *nyújtott forgási ellipszoid* felszínét ($a > b$).

Itt:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y' = \frac{-\frac{b}{a^2}x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \quad y\sqrt{1 + y'^2} =$$

$$= b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\cdot\sqrt{1 + \frac{\frac{b^2}{a^2}x^2}{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Tehát:

$$F = 2\cdot 2\pi\int_0^a\sqrt{1 - \left(\frac{x\varepsilon}{a}\right)^2}\,dx\,.$$

Az $\frac{\varepsilon}{a}\,x = \sin t$ helyettesítéssel:

$$F = 4\pi\frac{ab}{\varepsilon}\int_0^{\arcsin\varepsilon}\cos^2 t\,dt = 2\pi\frac{ab}{\varepsilon}\left[t + \sin t\sqrt{1 - \sin^2 t}\right]_0^{\arcsin\varepsilon} =$$

$$= 2\pi b\left[\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon + b\right].$$

8. Az előbbi példa nyomán határozzuk meg az adott ellipszis y tengely körüli megforgatásával nyert ú. n. *lapos forgási ellipszoid* felszínét ($a > b$).

9. Forgassuk meg az $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ *cikloist* az x tengely körül. $F_x(0, 2\pi) = ?$

Itt:

$$\dot{x} = r(1 - \cos t), \quad \dot{y} = r\sin t; \quad y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r\,(1 - \cos t)\,r\sqrt{1 - 2\cos t + 1} =$$

$$= \sqrt{2}\,r^2\,(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} = 4\,r^2\sin^3\frac{t}{2}\,.$$

Tehát:

$$F = 2\pi \cdot 4r^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt.$$

Az integrandus $t = \pi$-re szimmetrikus lévén:

$$F = 16\pi r^2 \int\limits_0^{\pi} 2\left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2}\, dt = 32\, \pi r^2 \int\limits_{u=0}^{+1} (1 - u^2)\, du =$$

$$= 32\, \pi r^2 \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_0^{+1} = \frac{64\pi r^2}{3}.$$

10. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$; $F_x(0, \pi) = ?$

Itt:

$$\dot{x} = 2a\,(-\sin t + \sin 2t),\ \dot{y} = 2a\,(\cos t - \cos 2t);\ y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} =$$

$$= 2a\,(\sin t - \sin t \cos t) \sqrt{4a^2\,[1 + 1 - 2\,(+ \sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t)]} =$$

$$= 4a^2 \sin t\,(1 - \cos t) \sqrt{2\,(1 - \cos t)} = 4\sqrt{2}a^2\,(1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} \sin t.$$

Így:

$$F = 2\pi \cdot 4a^2 \sqrt{2} \int\limits_0^{\pi} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} \sin t\, dt = 8\sqrt{2}\pi a^2 \left(\frac{2}{5}\,[1 - \cos t\,]^{\frac{5}{2}}\right)_0^{\pi} =$$

$$= 8\sqrt{2}\pi a^2\, \frac{2}{5}\,[(\sqrt{2})^5 - 0] = \frac{128\pi a^2}{5}.$$

11. Forgassuk meg az $r = b(1 + \cos \varphi)$ *kardioidot* a polártengely körül. $F(0, \varphi_1) = ?$ $F(0, \pi) = ?$

Esetünkben:

$$\dot{r} = -b \sin \varphi,\ r \sin \varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} = b \sin \varphi\,(1 + \cos \varphi) \sqrt{b^2\,(1 + 2 \cos \varphi + 1)} =$$

$$= \sqrt{2}\, b^2 \sin \varphi\,(1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}.$$

Így:

$$F(0, \varphi_1) = 2\pi \cdot \sqrt{2}\, b^2 \int\limits_0^{\varphi_1} (1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} \sin \varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}\pi b^2}{5}\left[(1 + \cos \varphi)^{\frac{5}{2}}\right]_{\varphi_1}^{0} = \frac{32\pi\, b^2}{5}\left(1 - \cos^5 \frac{\varphi_1}{2}\right).$$

Végül:

$$F(0, \pi) = \frac{32\pi\, b^2}{5}.$$

12. Az $r = e^{\varphi}$, *logaritmikus spirálist* megforgatjuk az x tengely körül. $F\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = ?$

Most:

$$r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} = \sqrt{2} \sin\varphi\, e^{2\varphi};$$

így:

$$F\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = 2\pi \cdot \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2\varphi} \sin\varphi\, d\varphi\,.$$

Kétszer parciálisan integrálva kapjuk:

$$F = 2\sqrt{2}\,\pi \frac{1}{5} \Big[2e^{2\varphi} \sin\varphi - e^{2\varphi} \cos\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{5} (2e^{\pi} + 1)\,.$$

13. Forgassuk meg az $r = a\varphi$ *archimedesi spirálist* a polár-tengely körül: $F\,(0, \pi) = ?$
Most:

$$\dot{r} = a;\; r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} = a^2 \varphi \sin\varphi \cdot \sqrt{\varphi^2 + 1}\,,$$ nem integrálható elemi úton!

14. Határozzuk meg az $y = \sqrt{x}$ görbe x tengely körüli megforgatásával keletkező forgásfelület $1 \leq x \leq 4$ szakaszmenti részének felszínét.

15. Forgassuk meg az $y = \sqrt{1 - x}$ görbének az y tengely által levágott véges szakaszát az x tengely körül és határozzuk meg az így keletkező forgásfelület felszínét.

16. Határozzuk meg az $y^2 = 4ax$ *parabola* x tengely körüli megforgatásával keletkező felület $[0, 3a]$ szakaszmenti részének felszínét.

17. Határozzuk meg a $3y - x^3 = 0$ *harmadfokú parabola* x tengely körüli megforgatásával nyert felület felszínét $x = 0$-tól $x = a$-ig.

18. Határozzuk meg az $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ *láncgörbe* x tengely körüli megforgatásával nyert *láncfelület (katenoid)* felszínét $x = 0$-tól $x = a$-ig.

19. Határozzuk meg azon orsóalakú felület felszínét, amely az $y = \sin x$ görbe egy félhullámának x tengely körüli megforgatásával keletkezik.

20. Az $y = \operatorname{tg} x$ görbe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ szakaszra eső ívét megforgatjuk az abszcissza-tengely körül. Határozzuk meg az így nyert felület felszínét.

21. Határozzuk meg a $9ay^2 = x(3a - x)^2$ görbe hurokja x tengely körüli megforgatásával nyert felület felszínét.

22. Az $x^2 + y^2 = a^2$ *kör* első negyedbeli ívét megforgatjuk *húr*ja körül. Határozzuk meg az így nyert felület felszínét. (Lásd hátul.)

23. Határozzuk meg az $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ paraméteres egyenletrendszerű görbe x tengely körüli megforgatásával nyert felület felszínét $t = 0$ és $t = \frac{\pi}{2}$ között.

24. Határozzuk meg az $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ *asztrois* x tengely körüli megforgatásával nyert felület felszínét.

25. A *ciklois* ívét megforgatjuk szimmetriatengelye körül. Határozzuk meg az így nyert felület felszínét. (Lásd hátul.)

26. Az $r = 2a \sin \varphi$ görbét megforgatjuk a polártengely körül. Határozzuk meg az így nyert felület felszínét.

27. Az $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ *lemniszkátát* megforgatjuk a polártengely körül. Határozzuk meg az így nyert felület felszínét.

28. Az $y = e^{-x}$ görbe $[0, \infty)$ szakaszmenti részét megforgatjuk az abszcisszatengely körül. Határozzuk meg az így nyert felület felszínét.

29. Az $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ *traktrixot* megforgatjuk az abszcisszatengely körül. Határozzuk meg e végtelenbe nyúló felület felszínét.

30. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = \sqrt{x}$ görbe x tengely körüli forgatása által keletkező forgásfelület x-től 6-ig terjedő szeletének felülete 50 területegység legyen.

31. Határozzuk meg a értékét úgy, hogy az $y = \sqrt{a + x}$ görbe y tengely levágta szakaszának x tengely körüli forgatása által keletkező forgásfelület felszíne 20 területegység legyen.

*32. Mekkora a *katenoid* $F(0, x)$ felszínének és az x abszcisszájú metszetének aránya az $x \to \infty$ határesetben?

A katenoid az $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ görbe x tengely körüli megforgatásából származik; felszíne:

$$F(0, x) = \int_0^x y\, ds = \pi a \left(x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a}\right).$$

Az x abszcisszájú metszet területe: $T(x) = \pi a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$. A kettő aránya tehát:

$$\frac{F(0, x)}{T(x)} = \frac{\pi a\left(x + \frac{1}{2} a \operatorname{sh} \frac{2x}{a}\right)}{\pi a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \frac{x}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} + \operatorname{th} \frac{x}{a}.$$

Ennek *határértéke* $x \to \infty$ esetén:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(0, x)}{T(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} + \lim_{x \to \infty} \operatorname{th} \frac{x}{a} = 1,$$

mert $\operatorname{th}(+\infty) = 1$, és a *L'Hospital*-szabály* segítségével:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}} = 0.$$

*β 1. Képezzünk forgásfelületet az $x^2 + z^2 = a^2$ *kör* x tengely körüli megforgatásával. Mekkora felszínű darabot metsz ki belőle az $x = 0$-tól számítva az

$$y = \frac{1}{b} \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}, \quad b \geq a$$

egyenletű (vertikális) henger?

* A. III. kt. 6. §.

Esetünkben:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad z' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + z'^2} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

$$z\sqrt{1 + z'^2} \arcsin \frac{y}{z} = \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{b^2 - x^2}}{b\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= a \arcsin \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} = a \arccos \frac{x}{b}.$$

Tehát:

$$F(0, x_1) = a \int_{x=0}^{x_1} \arccos \frac{x}{b}\, dx.$$

Parciális integrálással nyerjük:

$$F(0, x_1) = a\left[b - \sqrt{b^2 - x_1^2} + x_1 \arccos \frac{x_1}{b}\right].$$

Továbbá:

$$F(0, a) = a\left[b - \sqrt{b^2 - a^2} + a \arccos \frac{a}{b}\right].$$

Az $a = b$ esetben $\left[y = \frac{a^2 - x^2}{a} \textit{ parabolikus henger}\right]$:

$$F(0, a) = 8a^2.$$

2. Az előbbi feladathoz vegyük az $y = \frac{x}{b}\sqrt{a^2 - x^2}$, $b \geq a$ egyenletű hengert.

Itt:

$$z\sqrt{1 + z'^2} \arcsin \frac{y}{z} = a \arcsin \frac{x}{b}.$$

Ezzel:

$$F(0, a) = 8a\left[a \arcsin \frac{a}{b} - b + \sqrt{b^2 - a^2}\right].$$

3. A $z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $a \geq c$ ellipszis x tengely körüli megforgatásával nyert *forgási ellipszoid-felületből* mekkora darabot metsz ki az $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $b \leq c$ egyenletű *elliptikus henger*? [az $x = 0$ helytől számítva (175. ábra)].

$$F(0, x_1) = \int_{x=0}^{x_1} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} \arcsin \frac{b}{c}\, dx, \quad \text{ahol } \varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}.$$

Integrálva:

$$F(0, x_1) = \frac{c}{2a}\left[x_1\sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x_1^2} + \frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x_1}{a}\right]\arcsin\frac{b}{c},$$

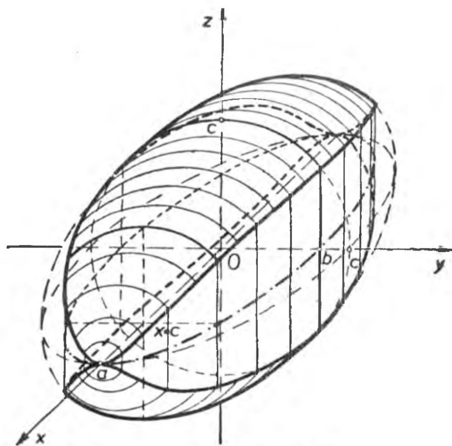
$$F = 8\,F(0, c) = 4c^2\left[\frac{c}{a} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}\arccos\frac{c}{a}\right]\arcsin\frac{b}{c}.$$

A $c = a$ (gömb) esetén:

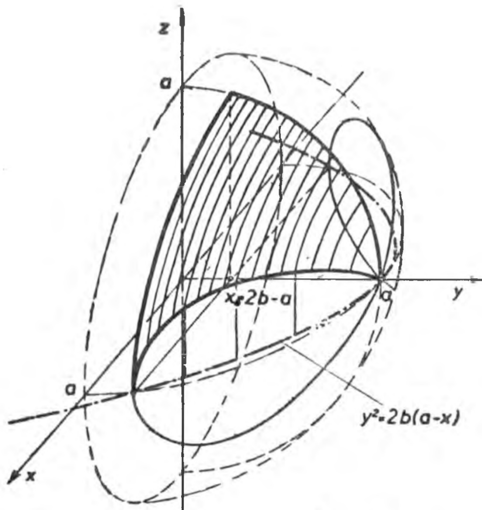
$$F_g = 8a^2\arcsin\frac{b}{a},$$

mert

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}\arccos\frac{c}{a} = \frac{\alpha}{\sin\alpha} \to 1, \quad \text{ha} \quad a^2 - c^2 \to 0 \quad \text{és vele} \quad \alpha \to 0.$$



175. ábra



176. ábra

4. Az 1. példabeli gömböt messük az $y^2 = 2b(a - x)$, $b \leq a$ *parabolikus hengerrel*. Állapítsuk meg $x_0 = 2b - a$ (az $x^2 + y^2 = a^2$ kör és a parabola metszéspontjának abszcisszája) és $x = a$ közötti integrálással a 176. ábrán vonalkázott *gömbhéj*darab felszínét!

Itt:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad z' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

és

$$z\sqrt{1 + z'^2}\arcsin\frac{y}{x} = a\arcsin\frac{\sqrt{2b}\sqrt{a - x}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\arcsin\sqrt{\frac{2b}{a + x}}.$$

Ily módon $\left| u^2 = \frac{2b}{a+x} \right.$ helyettesítéssel$\Big|$ nyerjük:

$$F = 4a\left[2\sqrt{b(a-b)} - \pi b + 2a \arcsin\sqrt{\frac{b}{a}}\right].$$

Ha speciálisan $b = \frac{a}{2}$, úgy $F = 4a^2$.

5. Messük az előbbi gömböt $(y-c)^2 + x^2 = (a-c)^2$, $c < a$ körhengerrel, [az $y_0 = 2c - a$-tól $(x_0 = 0)$ az $y_1 = a$-ig integrálunk (177. ábra)].

Itt:

$$z = \sqrt{a^2 - y^2}, \quad z' = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

$$z\sqrt{1 + z'^2} \arcsin\frac{x}{z} = a \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)^2 - (y-c)^2}{a^2 - y^2}} =$$

$$= a \arcsin\sqrt{1 - \frac{2c}{a+y}} = a \arccos\sqrt{\frac{2c}{a+y}}.$$

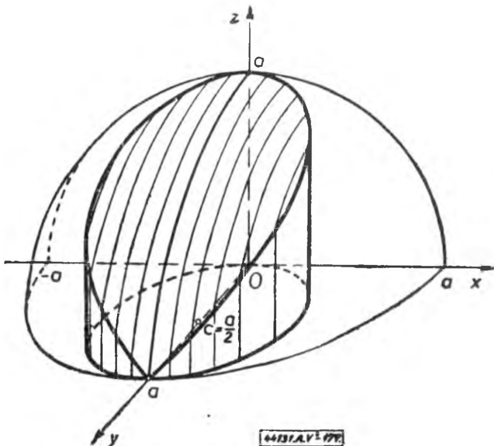
Az $u^2 = \frac{2c}{a+y}$ helyettesítés és parciális integrálás után nyerjük a negyedgömbfelületből kimetszett ablakra:

$$F = 4a\left[a \arccos x\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{c(a-c)}\right].$$

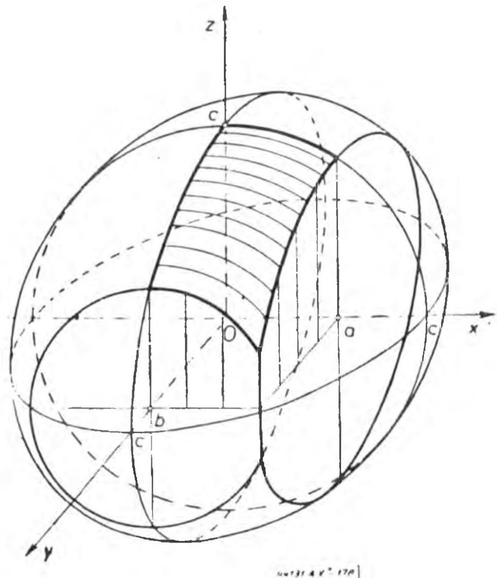
Ha $c = \frac{a}{2}$, úgy $F = \pi a^2 - 2a^2$, tehát a negyedgömb visszamaradó része: $F_v = 2a^2$.

(Lásd a *Viviani*-problémát!)

6. Messük az előbbi helyzetű, de most c sugarú (tehát $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ egyenletű) gömböt $x = a$ és $y = b$ vetítősíkkal (178. ábra)



177. ábra



178. ábra

Ekkor:

$$F(0, x_1) = c\int\limits_{x=0}^{x_1} \arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - x^2}}\, dx .$$

Parciális integrálással, valamint

$$x^2 = \frac{c^2 u^2}{c^2 + u^2}, \quad c^2 - x^2 = \frac{c^4}{c^2 + u^2}$$

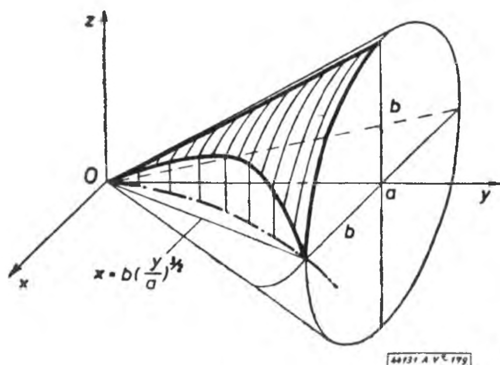
helyettesítéssel nyerjük az $x_1 = a$ esetre:

$$F(0, a) = c\left[a \arcsin \frac{b}{\sqrt{c^2 - a^2}} + b \arcsin \frac{a}{\sqrt{c^2 - b^2}} - c \arcsin \frac{ab}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}\right].$$

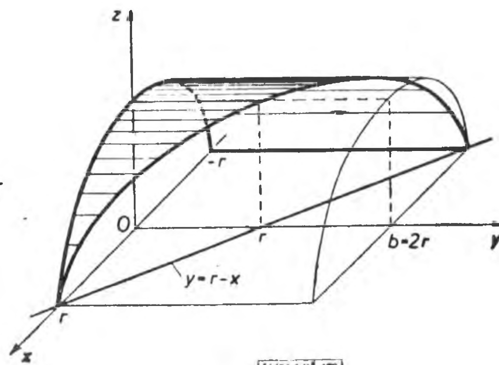
Ha $a^2 + b^2 = c^2$, úgy: $F_c = \frac{c\pi}{2}(a + b - c)$.

7. Messük az $z = \frac{b}{a} y$ egyenes y tengely körüli megforgatásával képzett *kúp*felületet az $x = b\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ szemikubikus hengerrel. Mekkora a vonalkázott kúpfelületdarab (179. ábra)?

8. Messük az előbbi forgáskúpot az $x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$ egyenletű hengerrel. $F(0, y_1) = ?$ $F(0, a) = ?$



179. ábra



180. ábra

γ 1. Adva van a (z, x) síkon egy r sugarú *félkör* a 180. ábrán feltüntetett helyzetben. Mekkora az erre illeszkedő egyenes henger felszíne az $y = b$ síkig és az $y = r - x$ síkig?

Itt $z' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, s így a formula szerint:

$$F_b = \int_{-r}^{r} b\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = rb\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = 2\,rb\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_0^r,$$

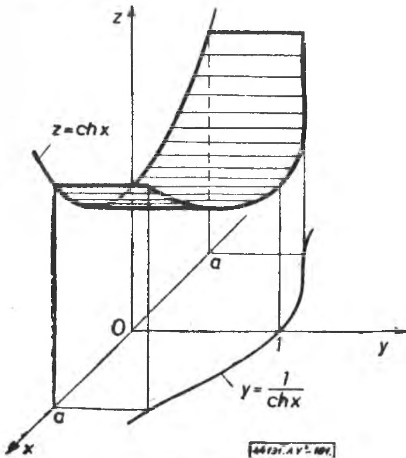
mert az integrálandó páros függvény. Ennek következtében: $F_b = rb\,\pi$.
Ha speciálisan $b = 2r$; akkor:

$$F_{2r} = 2r^2\pi\,.$$

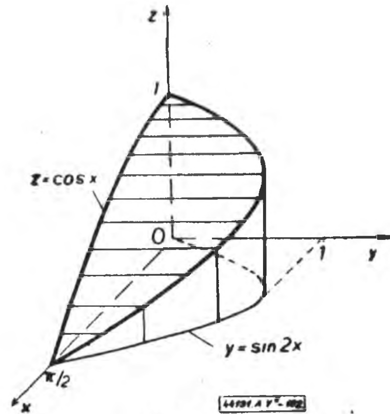
Hasonlóan (az $y = r - x$ síkkal):

$$F_x = r\int_{-r}^{r} (r - x)\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = r^2\left[\arcsin\frac{x}{r}\right]_{-r}^{r} + r\left[\sqrt{r^2 - x^2}\right]_{-r}^{r} = r^2\pi\,.$$

2. Határozzuk meg a $z = \operatorname{ch} x$ egyenletű hengerfelület azon részének **felszínét,** amelyet belőle az $y = 0$ koordinátasík és az $y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ egyenletű hengerfelület kimetsz a $-a \leq x \leq a$ szakaszon (181. ábra).



181. ábra



182. ábra

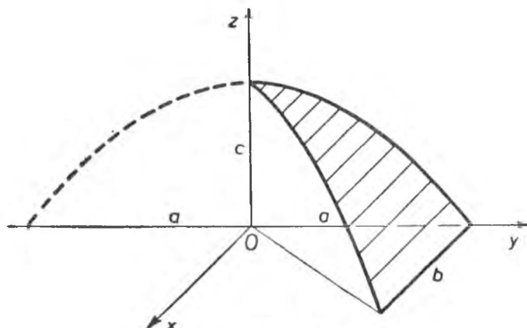
A megadott formulával dolgozva, nyerjük:

$$F(-a, a) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int_{-a}^{a} \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x}\,dx = \left[x\right]_{-a}^{a} = 2a.$$

3. Határozzuk meg a $z = \cos x$ egyenletű hengerfelület azon részének felszínét, amelyet belőle a $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ szakaszon az $y = 0$ koordinátasík és az $y = \sin 2x$ egyenletű hengerfelület kimetsz (182. ábra).

$$F\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx = \frac{2}{3}\left[(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}[2\sqrt{2} - 1].$$

4. Adva a (z, y) síkon álló *parabolikus félhenger*, az ábrázolt helyzetben. Vezérgörbéje a z tengelyt a $+c$ helyen, az y tengelyt a $+a$ (és $-a$) helyen metszi. Kérdés, mekkora felületű darabot (a 183. ábrán vonalkázva) metsz le e hengerből az ábrázolt függélyes vetítősík? *(Parabolikus kolostorboltozat.)*



183. ábra

A vezérgörbe egyenlete: $z = -\alpha y^2 + c$; $z(0) = c$, $z(a) = 0 = -\alpha a^2 + c$, ahonnan $\alpha = \frac{c}{a^2}$, tehát:

$$z = -\frac{c}{a^2} y^2 + c = c\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right).$$

$$z' = \frac{dz}{dy} = -\frac{2c}{a^2} y. \quad \sqrt{1 + z'^2} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{4c^2}{a^4} y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2c}{a^2} y\right)^2}.$$

A vetítősík (nyomvonalának) egyenlete:

$$x = \frac{b}{a} y.$$

Így az integrandus:

$$x(y)\sqrt{1 + z'(y)^2} = \frac{b}{a} y \sqrt{1 + \frac{4c^2}{a^4} y^2}.$$

A szóbanforgó hengerdarab felszíne tehát:

$$F = \int_{y=0}^{a} \frac{b}{a} y \sqrt{1 + \frac{4c^2}{a^4} y^2}\, dy = \frac{b}{a} \frac{a^4}{8c^2} \int_{y=0}^{a} \frac{8c^2}{a^4} y \sqrt{1 + \frac{4c^2}{a^4} y^2}\, dy =$$

$$= \frac{ba^3}{8c^2} \int_{u=1}^{1+\frac{4c^2}{a^2}} \sqrt{u}\, du, \quad \text{ahol } u = 1 + \frac{4c^2}{a^4} y^2;$$

$$F = \frac{ba^3}{12c^2}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{1+\frac{4c^2}{a^2}} = \frac{b}{12c^2}\left[\sqrt{(a^2 + 4c^2)^3} - a^3\right].$$

5. Legyen az előző példabeli henger és vetítősík helyzete változatlan, a henger vezérgörbéje pedig a $P_1(0, 0, c)$, $P_2(0, a, 0)$, $P_3(0, -a, 0)$, pontokkal meghatározott körívnek a pozitív z és y tengely közé eső darabja. *(Körös kolostorboltozat)* (184. ábra).

A kör egyenlete:

$$a^2 = c(k + k + c) = c(2k + c),$$

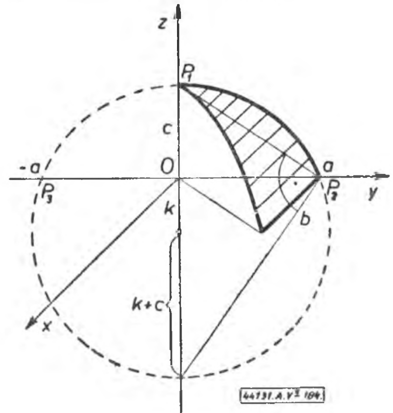
$$k = \frac{a^2 - c^2}{2c},$$

$$r = c + k = \frac{2c^2 + a^2 - c^2}{2c} = \frac{a^2 + c^2}{2c},$$

tehát

$$\left(z + \frac{a^2 - c^2}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2 + c^2}{2c}\right)^2,$$

$$z = \sqrt{\left(\frac{a^2 + c^2}{2c}\right)^2 - y^2} - \frac{a^2 - c^2}{2c}.$$



184. ábra

Az előző példabelihez hasonló számítással:

$$F = \frac{b(a^2 + c^2)}{2a}.$$

6. Ugyanazon feladat, mint az előző kettő, csak a henger vezérgörbéje a és c féltengelyű *ellipsziskvadráns. (Elliptikus boltozat.)*

Ha $a > c$, úgy:

$$F(0, y_1) = \int_{y=0}^{y_1} y \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 y^2}{a^2 - y^2}}\, dy, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}.$$

Ha $a < c$, úgy

$$F(0, y_1) = \int_{y=0}^{y_1} y \sqrt{\frac{a^2 - \lambda y^2}{a^2 - y^2}}\, dy, \quad \lambda^2 = \frac{c^2 - a^2}{a^2}.$$

Az integrálás $a^2 - y^2 = u^2$ helyettesítéssel végezhető. Az $y_1 = a$-ig integrálva nyerjük:

$$F(0, a) = \frac{ab}{2}\left[1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} \ln \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)\right], \quad a > c;$$

illetve

$$F(0, a) = \frac{ab}{2}\left[1 + \frac{1 + \lambda^2}{\lambda} \operatorname{arctg} \lambda\right], \quad a < c.$$

7. Ugyanazon feladat, mint az előbbiek. A henger vezérgörbéje most az $y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *asztrois.* Mekkora a lemetszett hengerdarab felszíne?

$$F(0, y_1) = \frac{3}{5}\, b \sqrt[3]{\frac{y_1^5}{a^2}} = \frac{2}{5}\, \frac{b}{a}\, y_1 \cdot \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} y_1^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{5}\, x_1 S_{y_1},$$

ahol $S_y = \frac{3}{2} a^{\frac{1}{3}} y_1^{\frac{2}{3}}$ az asztrois ívhossza a $[0, y_1]$ szakaszon.

Ha $y_1 = a$, akkor:

$$F(0, a) = \frac{3}{5} ab = \frac{2}{5} b S_a .$$

*8. Meghatározandó a $z = \sqrt{c^2 - x^2}$ körhengerkvadránsból az $y = \frac{bc}{c - x}$ henger által lemetszett darab felszíne, az $x = 0$-tól számítva (185. ábra).

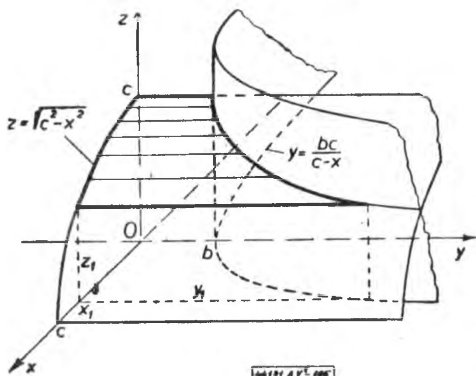
Esetünkben:

$$z' = -\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}; \quad y(x)\sqrt{1 + z'(x)^2} = \frac{bc}{c - x}\sqrt{1 + \frac{x^2}{c^2 - x^2}} = \frac{bc^2}{(c - x)\sqrt{c^2 - x^2}} .$$

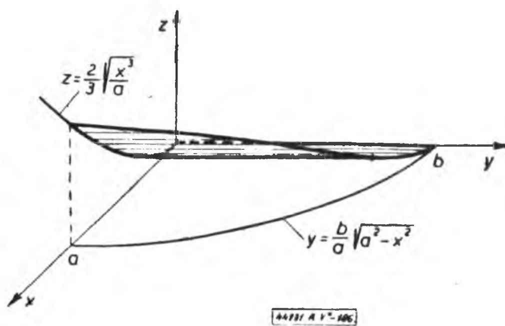
Ezekkel:

$$F(0, x_1) = \int\limits_{x=0}^{x_1} \frac{bc^2\, dx}{(c - x)\sqrt{c^2 - x^2}} .$$

Helyettesítés: $x = c\cos t$, $\frac{\pi}{2} \geqq t \geqq t_1$. Ily módon:



185. ábra



186. ábra

$$F(0, t_1) = \frac{bc^2}{c^2} c \int\limits_{t=\frac{\pi}{2}}^{t_1} \frac{-\sin t\, dt}{(1 - \cos t)\sin t} = bc \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{t_1} \frac{-dt}{2\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= bc\left[\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{t_1} = bc\left[\operatorname{ctg}\frac{t_1}{2} - 1\right].$$

Mivel

$$yz = \frac{bc}{c(1 - \cos t)} c\sin t = \frac{2\, bc \sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = bc\operatorname{ctg}\frac{t}{2} .$$

így eredményünk egyszerűbb alakban:

$$F(0, x_1) = y_1 z_1 - bc.$$

*9 Hasonló a feladat $z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ és $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ esetén (186. ábra).

Most:

$$z' = \sqrt{\frac{x}{a}}\,;\quad y(x)\sqrt{1 + z'(x)^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\cdot\sqrt{1 + \frac{x}{a}} =$$

$$= b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\cdot\sqrt{1 + \frac{x}{a}} = b\left(1 + \frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \frac{x}{a}}.$$

Ezekkel:

$$F(0, x_1) = \int_0^{x_1} b\left(1 + \frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \frac{x}{a}}\,dx.$$

Helyettesítés:

$$\frac{x}{a} = \cos 2t;\quad b\left(1 + \frac{x}{a}\right)\sqrt{1 - \frac{x}{a}} = 2\sqrt{2}\,b\cos^2 t\sin t\,,$$

$$dx = -2a\sin 2t\,dt = -4a\sin t\cos t\,dt,$$

$$-\frac{\pi}{4} \leqq t \leqq \frac{1}{2}\arccos\frac{x_1}{a} = t_1\,.$$

Ily módon:

$$F(0, t_1) = -8\sqrt{2}\,ab\int_{-\frac{\pi}{4}}^{t_1}\cos^3 t\sin^2 t\,dt =$$

$$= -8\sqrt{2}\,ab\int_{-\frac{\pi}{4}}^{t_1}(1 - \sin^2 t)\sin^2 t\cos t\,dt = +8\sqrt{2}\,ab\left[\frac{\sin^3 t}{3} - \frac{\sin^5 t}{5}\right]_{t_1}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= 8\sqrt{2}\,ab\left[\frac{2\sqrt{2}}{3\cdot 8} - \frac{4\sqrt{2}}{5\cdot 32} - \frac{\sin^3 t_1}{3} + \frac{\sin^5 t_1}{5}\right].$$

Mivel:

$$1 - \frac{x}{a} = 1 - \cos 2t = 2\sin^2 t,\quad \text{azaz}\quad \sqrt{\frac{a - x_1}{2a}} = \sin t_1\,,$$

így:

$$F(0, x_1) = 8\sqrt{2}\,ab\left[\frac{\sqrt{2}\,(10 - 3)}{120} - \left(\frac{1}{3} - \frac{a - x_1}{5\cdot 2a}\right)\sqrt{\left(\frac{a - x_1}{2a}\right)^3}\right] =$$

$$= \frac{2b}{15}\left[7a - (7a + 3x_1)\sqrt{\left(\frac{a - x_1}{a}\right)^3}\right].$$

Az $x_1 = a$ esetén.

$$F(0, a) = \frac{14}{15}ab\,.$$

10. Hasonló a feladat $z = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{8}\,a}$, $y = \frac{bx^2}{a^2 - x^2}$ esetén.

11. Hasonló a feladat $z = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, $y = \frac{b^3}{a^2 - x^2}$ esetén.

12. Hasonló a feladat $z = a \operatorname{arch} \frac{x}{a} = a \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)$ (láncgörbe) és $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (hiperbola) esetén.

13. Hasonló a feladat, ha

$$z = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{2ax - x^2}}{a - \sqrt{2ax - x^2}} - \sqrt{2ax - x^2}$$

(*egyenes traktrixa* csúcsával az origóban, $x = a$ aszimptótával) és $y = b\,\frac{a^2 - x^2}{a^2}$ (*parabola*, csúcsa $y = b$-nél). $F(0, x_1) = ?$ $F(0, a) = ?$

14. Az előző feladatban vegyünk a parabola helyett a és b féltengelyű *ellipszis-kvadránst*.

15. Az előbbi feladatban vegyünk az a és b féltengelyű ellipszis-kvadráns helyett $\frac{a}{2}$ és $\frac{b}{2}$ féltengelyű *ellipszist*.

16. $z = a \ln \frac{a}{a^2 - x^2}$, $y = b\,\frac{a^2 - x^2}{a^2}$; $F(0, x_1) = ?$ $F(0, a) = ?$

EREDMÉNYTÁR

1. §. Határozott integrál

b)

α) α_1) 3. $$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} =$$

$$= 2\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}\,.$$

4. $$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

5. $$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^m \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}\,.$$

α_2) 9. $$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n+1} - 1}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right) - 1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{n+1}{n}} - 1\right) = 1\cdot(e-1) = e-1\,.$$

10. $$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (a\,q^i)^{-1}\cdot(aq^{i+1} - aq^i) = n\,(q-1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right).$$

$$I = \lim_{n\to\infty} \sigma = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}\,.$$

c)

γ | 18. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$. 19. $I = \ln \sqrt{\frac{3}{2}}$.

20. $I = 3 \ln \frac{b}{b-a}$. 21. $I = \frac{7}{72}$.

22. $I = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$. 23. $I = -5(\sqrt[5]{16} - 1)$.

24. $I = \frac{\pi}{12}$. 25. $I = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 26. $I = 2 - \frac{\pi}{4}$.

27. Az A. IV. 6. §. a) ϑ) 6. példa szerint:

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \quad \text{és} \quad I = F(a) - F(-a) = \frac{a^2\pi}{2}.$$

28. $I = -\ln \frac{\sqrt{3}}{2}$. 29. $I = 0{,}2\,(e - 1)^5$.

30. $I = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{10}} (\sin 5x + \sin x)\,dx$; $I = \frac{3}{5} - \frac{\cos 18^\circ}{2}$.

31. $I = 1 - 2 \ln 2$.

32. $I = \int\limits_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1}\,dx$ és két integrál összegeként előállítva: $I = 1 - \frac{\pi}{4}$.

33. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. A végeredménynél felhasználtuk az $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arctg}\left[\frac{b-a}{1+ab}\right]$ azonosságot ami az inverz függvényre áttérés és a $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ azonosság alkalmazásával látható be.

34. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$. 35. $I = \frac{1}{8} \ln \frac{3}{2} - \frac{19}{576}$.

d)

β | 7. $L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$. 9. $I = 1$. 10. $I = e - 2$.

11. $I = 0$. 12. $I = -4\pi^2$. 13. $I = \frac{\pi - 2}{4}$.

14. $I = \frac{1}{16}(e^4 + 1)$. 15. $I = 2(\ln 2 - 1)^2$. 16. $I = 6 - 2e$.

17. $I = 2 - \frac{3}{4 \ln 2}$. 18. $I = \pi \frac{9 - 4\sqrt{3}}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

19. $I = \frac{1}{6}$. 20. $I = \frac{\pi}{8}$.

1. Az A. IV. kt. 4. §. a) $\delta_2)$, 6. §. a) $\delta)$ és az 1. példa felhasználásával:

$I = \frac{1}{2} \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ 22. $I = \frac{e^{\pi} - 2}{5}$.

23. Az A) IV. kt. 6. §. a) $\delta)$ rekurzív formula és az 1. példa felhasználásával.

24. Az A) IV. kt. 6. §. a) $\varepsilon)$ rekurzív formula alapján világos.

25. $x = \sin t$ helyettesítés, majd az 1. példa felhasználása.

γ 4. $x = a \sin u$, $I = \frac{a^4 \pi}{16}$.

6. Az $x = \pi$-re fennálló szimmetria miatt $I = 2\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{a + b \cos x}$.

Helyettesítés: $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$. 8. $x = \sin t$; $I = 1 - \frac{\pi}{4}$.

9. $x = \operatorname{ch} t$, majd az integrált $\frac{\operatorname{ch}^2 t - 1}{\operatorname{ch} t} = \operatorname{ch} t - \frac{1}{\operatorname{ch} t}$ alakra írva és ez utóbbit újabb $u = \operatorname{th} \frac{t}{2}$ helyettesítés után integrálva: $I = \sqrt{8} - \frac{\pi}{3}$.

10. Először a számlálót gyöktelenítjük: $I = \int\limits_0^1 \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$; $I = \frac{\pi}{6} - 1$.

11. $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $I = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 12. $\sqrt{x} = t$; $I = 2 - \frac{\pi}{2}$.

13. $\sqrt{x} = t$; $I = 7 + 2 \ln 2$. 14. $\sqrt{x} = t$; $I = \frac{5}{3} - 2 \ln 2$.

15. $1 + x = t^2$; $I = \frac{32}{3}$.

16 $1 + \ln x = t$ (vagy $\ln x = t$) helyettesítés útján: $I = 2$.

17. $x - 2 = t^3$. $I = 8 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

18 $I = \int\limits_1^e \frac{u^2}{1 + u^2} \frac{du}{u}$ ($u = e^x$ helyettesítés után); vagy a még egyszerűbb $u = e^{2x}$ helyettesítéssel: $I = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + e^2}{2}$.

19. $e^x - 1 = t^2$, $x = \ln(t^2 + 1)$ helyettesítéssel: $I = \frac{4 - \pi}{2}$.

20. $e^x - 1 = t^2$; $e^x\,dx = 2t\,dt$; $I = 4 - \pi$.

21. $e^x = t$ $\quad I = \ln \frac{e + \sqrt{1 + e^2}}{1 + \sqrt{2}}$.

22. $x = \operatorname{tg} u$; $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^6 u \frac{1}{\cos^2 u}\,du$; $I = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}$.

23. Teljes négyzetre kiegészítéssel, majd $x + 1 = \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel:

$$I = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{3}).$$

24. Először $x = \sin u$, majd $t = \operatorname{tg}\frac{u}{2}$ helyettesítés. $I = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$.

25. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right)\cos^2 x} = \int\limits_0^1 (u^2 + 1)\,du = \frac{4}{3}$, (tg $x = u$ helyettesítés).

26. $x = a\sin^2 t$; $\quad I = \pi$.

27. $x = \frac{1}{z}$; $I = -\int\limits_3^1 z^4 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{z^2}\,dz = \int\limits_1^3 z\,(z^2 - 1)^{\frac{1}{3}}\,dz$.

(Az utolsó lépesben $z^2 = z(z^3)^{\frac{1}{3}}$ átalakítással éltünk.) $I = 6$.

28. $I = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x}(-\sin x)\,dx = -\int\limits_1^{\frac{1}{2}} \frac{1 - u^2}{u^3}\,du$; $I = 1{,}5 - \ln 2$.

29. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\frac{dx}{\cos^6 x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{tg}^4 x}\frac{1}{\cos^2 x}(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2\,dx =$

$$= \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{(1 + u^2)^2}{u^4}\,du; \qquad I = \frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{4}{3}.$$

30. $$I = \frac{1}{2a}\int_{\pi}^{0} \frac{-2a \sin x\, dx}{\sqrt{1 + 2a \cos x + a^2}} = \frac{1}{a}\left[\sqrt{1 + 2a \cos x + a^2}\right]_{\pi}^{0} =$$

$$= \frac{1}{a}\,[(1 + a) - (1 - a)] = 2\,.$$

31. $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a^2 \operatorname{tg}^2 x + b^2} = \int_0^{\infty} \frac{du}{a^2u^2 + b^2}. \quad I = \frac{\pi}{2ab}\,.$$

32. Az $x = \sin u$ helyettesítés, majd osztás után: $I = -\frac{\pi}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \sin^2 u}$,

itt újabb $\operatorname{tg} u = t$ helyettesítés. Végül: $I = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

34. Helyettesítés $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ $\left(\text{nem } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,!\right)$, $dx = \dfrac{dt}{2\cos^2\frac{t}{2}}$, $t_a = 2 \operatorname{arctg} 0 = 0$,

$t_f = 2 \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg} x = \frac{t}{2}$.

36. $I = a^{2n} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\,\frac{\pi}{2}$.

38. Az $x = \pi - u$ helyettesítés után $I = -I$, azaz $2I = 0$ adódik. Közben felhasználjuk a $\sin(\alpha + \beta)$-ra vonatkozó azonosságot.

44. Alkalmazzuk először az $\ln x = u$ helyettesítést; ekkor:

$$I = \int_{0{,}5}^{1} \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

Alkalmazzuk másodszor az $u = \sin^2 v$ helyettesítést. Ezzel:

$$I = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2 \sin v \cos v}{\sin v \cos v} = \frac{1}{2}\pi.$$

45. $\arcsin x = t$, $x = \sin t$, $dx = \cos t\, dt$, $t_a = 0$, $t_f = \frac{\pi}{2}$ helyettesítés után:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t\, dt.$$

Ezt tovább parciálisan integrálva, illetve felhasználva az A. IV. kt. 3. §. δ) alatti formulát, kapjuk:

$$I = \left[e^t \frac{\sin t + \cos t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \right).$$

46. Legyen $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$; ezzel:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t\,dt}{t^2+t+1} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(t^2+t+1)\right]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(t^2+t+1)\right]_0^1 - \frac{1}{4}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{36}.$$

47. Alkalmazva az

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = t^2, \quad 2ab\sin\varphi\,d\varphi = 2t\,dt \qquad t_a = a - b, \; t_f = \sqrt{a^2+b^2})$$

helyettesítést:

$$I = -\frac{1}{4a^3b^3}\int_{a-b}^{\sqrt{a^2+b^2}} [(a^2-b^2)^2 - 2(a^2+b^2)t^2 + t^4]\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4a^3b^3}\left[(a^2-b^2)^2 t - \frac{2}{3}(a^2+b^2)\,t^3 + \frac{t^5}{5}\right]_{a-b}^{\sqrt{a^2+b^2}} =$$

$$= \frac{1}{15a^3b^3}\left[2(a-b)^3(a^2+3ab+b^2) - \sqrt{a^2+b^2}\,(2a^4 - 11a^2b^2 + 2b^4)\right].$$

MŰSZAKI ALKALMAZÁSOK

8. $s \approx 2{,}7$ m. **9.** $x_2 = x_1 + \sin\left(\frac{2\pi\, t_2}{T} + \varphi_0\right) - \sin\left(\frac{2\pi\, t_1}{T} + \varphi_0\right).$

10. $x = x(y) = Ce^{\frac{y}{2k}}$. $x = x_0(y) = a\,e^{\frac{y}{2k}}$. $V = \pi a^2 k\left(e^{\frac{y_1}{k}} - 1\right)$.

11. $I = \frac{k}{g}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{(k+t)^2}{k^2-kt+t^2} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-k}{k\sqrt{3}}\right]_{t_0}^{t_1}$, ahol $t = \omega^{\frac{1}{3}}$, $k = g^{\frac{1}{3}}$.

12. $I = \frac{y_{n0} - Y_{n-1}}{E\,L}\left(e^{EL} - 1\right) + Y_{n-1}.$

13 $A = 182 + 0{,}251\,t + 0{,}000187\,t^2$.

14. $$I = \frac{(61{,}6 - C_2)(63{,}6 - C_2)}{(62{,}6 - C_2)^2} \ln \frac{62{,}6}{62{,}6 - C_2} + \frac{1}{(62{,}6 - C_2)^2} \ln \frac{C_2}{C_2 - C_0} + \frac{C_0}{62{,}6\,(62{,}6 - C_2)(62{,}6 - C_0)}.$$

e)

α–γ 4–6. ad α) $\xi = \frac{14}{9}$; ad β) $\xi = e^{\frac{8}{8}}$; ad γ) $\xi = \sqrt[3]{\frac{16}{e^{\frac{3}{2}}}}$.

δ 5. $\xi = \frac{b-a}{ab} \ln \frac{b}{a}$.

η 2. Az integrandus a $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban monoton csökken, és így:

$$\frac{1}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx \leq \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

azaz $0{,}5 \leq I \leq 0{,}72$. (Pontosabb számítással, más módszerrel: $I \approx 0{,}62$).

3. $\frac{1}{e} \leq I \leq 1$.

f)

6. $$\ln 5 = \int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{1}{3}\left[1 + \frac{4}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{4} + \frac{1}{5}\right] = \frac{73}{45} \approx 1{,}622.$$

7. Téglányszabállyal $I = 70$; érintő-szabállyal: $I = 62$; *Simpson*-szabállyal és határozott integrállal: $I = 68$. A *Simpson*-szabály hibaképlete szerint a hiba az $y^{(4)}$-jával arányos. Harmadfokú függvény esetén azonban $y^{(4)} = 0$, így a hiba is 0.

8–12.

Trapézszabállyal:	*Simpson*-formulával:
$I = 1{,}227$.	$I = 1{,}236$.
$I = 3{,}283$.	$I = 3{,}239$.
$I = 34{,}78$.	$I = 35{,}68$.
$I = 9{,}47$.	$I = 9{,}49$.
$I = 44{,}17$.	

13. $I \approx 0{,}837$. 14. $I \approx 0{,}833$. 15. $I \approx 2{,}59$.

16. $I \approx 0{,}950$. 17. $I \approx 0{,}985$. 18. $I \approx 0{,}957$.

19. Interpoláljuk az $x = 2$, 4, 6, 8-nál az y-t. $F \approx 33{,}14$.

MŰSZAKI ALKALMAZÁSOK

2. $K = \frac{h}{6}\left[r^2\pi + 4\pi\left(\frac{r+R}{2}\right)^2 + R^2\pi\right]$ 4. $T \approx 239$ m².

5. $Q \approx 11{,}7$ m². 6. $T \approx 1950$ mm².

8. Az $N = N(t)$ görbe esetén: $T = 2470$ Wó.

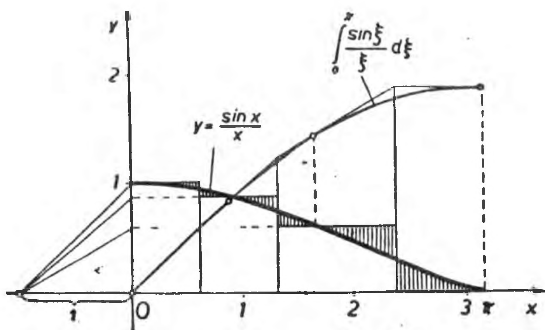
Az $N_2 = N^2(t)$ görbe esetén: $T = 9{,}55 \cdot 10^9$ m² kg²/sec.

g)

1. L. a 187. ábrát.

2. §. Az „elemek összegezésé"-nek módszere

MŰSZAKI ALKALMAZÁSOK



187. ábra

21. $Q \approx 1092$ Coulomb.

22. $Q \approx 5110$ Coulomb.

24. Alig több 5°-nál.

25. $t \approx 7'2''$.

26. $E = E_0 e^{-kt}$.

27. A kezdeti érték $\frac{1}{1024}$ része.

29. $m \approx 0{,}69$ g.

30. $t \approx 47'50''$.

31. $c = 0{,}0214$ mol/l. 32. $\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x) - k_1x^2$.

33. $m = \frac{8}{9}$ g. 34. $t \approx 37{,}3$ perc.

35. *a)* $c \approx 0{,}0238$ mol/l; *b)* $t \approx 7$ óra 20'.

c) nem bomlik el sohasem (a reakció elméletileg nem ér véget).

36. $k \approx 0{,}0513$. 37. $V \approx 2{,}915$ liter.

38. *a)* $H_1 = H\frac{\ln a - \ln c}{\ln a - \ln b} \approx 15$ cm; *b)* 0,125%.

3. §. Területszámítás

a)

α) $\alpha_1)$ 1. *b)* $T = \frac{1}{3}$. *c)* $T = 3$. 2. *b)* $T = 2$.

3. *a)* $T = \frac{2}{3}$. *b)* $T = -\frac{2}{3}$. *c)* $T = 0{,}999$.

4. *a)* $T = -\ln\frac{1}{3} = \ln 3$. *b)* $T = \ln 2$.

7. $T(0, 1) = \mathrm{sh}\, 1$. $T(-1, 1) = 2\,\mathrm{sh}\, 1$.

9. $T(0, \sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$. $T(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$. $T(-a, a) = 2\,\mathrm{arctg}\, a$.

13. $T = \ln 2$.

14. $T = 6\ln 2 - 2$.

15. $T = \frac{a^2}{2e}(e^2 - 1)$.

16. $T = \frac{32}{3}$.

17. $T(0, x_1) = \sqrt{2p}\int\limits_0^{x_1} x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3} x_1 y_1 = \frac{2\sqrt{2p x_1^3}}{3}$.

18. $T(0, x_1) = ab\,\mathrm{sh}\frac{x_1}{a} = a\sqrt{y_1^2 - b^2}$.

19. $T(0, x_1) = ab\left(e^{\frac{x_1}{a}} - 1\right) = a(y_1 - b)$. $T(-\infty, 0) = ab$.

20. $T(3, 4) = \frac{163}{4}$.

21. $T(1, 3) = 5{,}1$

22. $T(-1, 1) = 0$.

23. $T(0, \pi) = 2$.

24. $T(0, 2) = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{3}$.

25. $T(0;\ 0{,}3) = 0{,}126$.

26. $T(0, 3) = 100{,}86$.

27. $T(0, 4) = 64$.

28. $T(0, 3) = 18$.

29. $T(-3, 3) = 54$.

30. $T(2, 3) = 9\frac{5}{6}$.

31. $T(1, 4) = 15\frac{3}{4}$.

32. $T(0, 5) = 20$.

33. $T(1, 3) = 7\frac{1}{3}$.

34. $T(0, 8) = 1\frac{1}{3}$.

35. $T(0, 2) = \frac{16}{5}$.

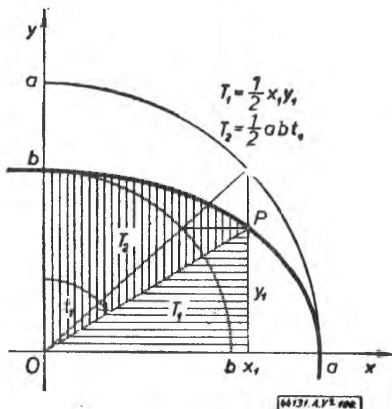
36. $T(1, 4) = \frac{2}{3}\sqrt{27} = 2\sqrt{3}$.

37. $T(0, 3) = \ln\frac{\sqrt{10}}{2}$.

38. $T(0, \pi) = \frac{\pi}{4}$.

46. $c = 2b$, illetve $c = 3b$.

47. $T(0, x_1) = \frac{1}{2}\left(x_1 y_1 + ab \arcsin \frac{x_1}{a}\right) = \frac{1}{2}(x_1 y_1 + ab\, t_1) = T_1 + T_2$.



188. ábra

Eszerint a kérdezett görbe alatti terület egy $T_1 = \frac{1}{2} x_1 y_1$ háromszögterületből és egy $T_2 = \frac{1}{2} ab\, t_1$ szektorterületből tevődik össze (188. ábra). Ennek megfelelően:

$$T(0, a) = \frac{1}{2}\left(a \cdot 0 + ab \frac{\pi}{2}\right) = \frac{ab\pi}{4}.$$

48. $T(a, x_1) = \frac{1}{2}\left[x_1 y_1 - ab \ln\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)\right]$.

49. $T = 14{,}076$.

50. $T = \frac{8}{\pi}$.

51. $T = 1$.

52. $T = 4$.

53. $T = \frac{324}{5}$.

54. $T = \frac{32}{15}\sqrt{2}$.

55. $T = \frac{32}{15}$.

56. $T = \frac{2048}{105}$.

57. $T(0, x_1) = \frac{1}{2} \arccos \frac{a - x_1}{a} - \frac{(a + x_1)(3a - 2x_1)}{6a} \sqrt{2a x_1 - x_1^2}$;

$$T\left(0, \frac{3}{2} a\right) = \frac{a^2 \pi}{3}; \qquad T(0, 2a) = \frac{a^2 \pi}{2}.$$

58. $T(0, x_1) = \frac{3a^2}{2} \arccos \frac{a - x_1}{a} - \frac{3a - x_1}{2} \sqrt{2ax_1 - x_1^2}$.

59. $x \approx 1{,}18$.

60. $x \approx -1{,}18$.

61. $x \approx 0{,}72$.

64. $T(x_1, c) = \frac{1}{2}\sqrt{(c - x_1)^3 (c + x_1)}$, $T\left(-\frac{c}{2}, c\right) = T\left(-c, -\frac{c}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} c^2$.

$a_2)$ 66. $T = 4\frac{2}{3}$.

67. $T = \frac{a^2}{4}$.

68. $T_y(1, 4) = 8 \ln 4$.

69. $T_x(1, 4) = 8 \ln 4$; a görbe a szögfelezőre szimmetrikus, a két terület tehát (a 68. és 69. példabeliek alapján) szükségképpen egyenlő.

70. $y = a \sin t$ helyettesítés, majd parciális integrálás;

$$T(a, y_1) = \frac{1}{2}\left[a^2 \arccos \frac{y_1}{a} - y_1 \sqrt{a^2 - y_1^2}\right], \quad T(a, 0) = \frac{a^2 \pi}{4},$$

vagyis az ábrázolt negyedkör területe.

71. $T_y(1; e) = 1.$

β

2. $T = \frac{1}{2}$. 3. $2\frac{1}{2}$. 4. $\frac{8}{3}$.

5. $T = 2.$ 6. $T = \frac{1}{3}$. 7. $T = \frac{16 - 2\sqrt{2}}{3}$.

8. $T = -\frac{16}{3}$. A terület az x tengely alatt van, azért negatív mérőszámú (α_3).

γ

9. $T = 20\frac{5}{6}$. 10. $T = 6\frac{17}{18}$.

11. $T = e + \frac{1}{e} - 2.$ 12. $T = 2.$ 13. $T = \frac{3}{4}$.

14. Először meghatározzuk az érintők egyenletét azon feltételből, hogy az (x_1, y), illetve (x_2, y_2) pont ismert (rajta van a parabolán), és hogy az iránytangenst a differenciálhányados ottani értéke szolgáltatja. Utána a parabola és az egyenesek közti területet a szokott módon számítjuk. $T = \frac{2}{3}$.

15. $T = \frac{9}{8}$. 16. $T = \frac{76}{3}$.

17. Azon pontot kell keresnünk, amelyhez tartozó érintő és rádiuszvektor egybeesik azaz $y' = \frac{y}{x}$. Behelyettesítve: $\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$, innen $x = e$; a keresett terület ebből:

$$T = \frac{e}{2} - 1.$$

18. A 14. példához hasonló eljárással számítjuk. $T = \frac{15}{4}$.

19. $T = 6{,}53.$ 20. $T = \frac{6\pi - 2\sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})}{3}$.

21. $T = \frac{4}{3}p^2$. 22. $T = 0{,}950.$

23. $T = 2.$ 24. $T = 10\frac{2}{3}$.

25. $T = \frac{6\pi + 16}{3}p^2$. 26. $T = 0{,}45.$

27. $T = 8$.

28. Szimmetria-okok miatt:

$$T = 2\int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)\,dx + 2\int_1^2 (5x^2 - x^4 - 4)\,dx = 8\,.$$

δ

5. $T(0, 2) = \frac{8}{15}\,.$

6. $T(0, 2\pi) = 3a^2\pi.$

7. $T(0, 2\pi) = 6a^2\pi.$

8. $T(0, 2\pi) = \frac{a^2}{3}(4\pi^3 + 3\pi)\,.$

9. $T(0, 2\pi) = 2\pi\, a^2.$

10. $T(0, \pi) = \pi - \frac{\pi^2}{4}\,.$

11. $T(0, x_1) = ab\,(t_1 - \sin t_1);\qquad T\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = ab\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),$

$$T(0, 2\pi) = 2\pi\, ab.$$

b)

α

7. $T_k = \frac{r^2\pi}{4}\,;\quad T_e = \frac{ab\,\pi}{4}\,.$

8. $T = \frac{3}{32}\pi\, a^2\,.$

9. $T\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{r^2 e^{\frac{\pi}{2}}}{2}\,.$

10. $x\dot{y} - \dot{x}y = a^2t^2\,(1 + t^2)$: $\quad T(0, t_1) = \frac{a^2}{30}t_1^3\,(5 + 3t_1).$

11. $T(0, t_1) = \frac{(a + b)\,(a + 2b)\,b}{2a}\,(t_1 - \sin t_1)\,.$

12. Az előbbi képletben b és t_1 ellenkező előjellel veendő.

β

10. $T(0, \varphi_1) = \frac{r_1^3}{6c}\,;\quad T(0, 2) = \frac{4c^2}{3}\,.$

11. $T(0, \varphi_1) = \frac{r_1^2 - a^2}{4b}\,.$

12. $T(0, \varphi_1) = \frac{a^2}{4}\varphi_1^2 = \left(\frac{r_1}{2a}\right)^2.$

13. $T(1, \varphi_1) = \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\varphi_1}\right) = \frac{a(a - r_1)}{2}\,;\quad T(1, \infty) = \frac{a^2}{2}\,.$

14. $T(1, \varphi_1) = \frac{a^2}{2}\ln\varphi_1 = a^2\ln\frac{a}{r_1}\,.$

15. $T(0, \pi) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a^2}{2} + b^2\right).$

16. $T(0, \varphi_1) = \frac{1}{8}\,[(a^2 + b^2)\,2\varphi_1 + (a^2 - b^2)\sin 2\varphi_1\,];\quad T(0, 2\pi) = \frac{a^2 + b^2}{2}\pi\,.$

17. $T\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{p^2}{6}(3 + 4\sqrt{2})$. 18. $T = \frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$.

19. $\varphi_0 = \sqrt[3]{30}$. 20. $\varphi_0 = 0$. 21. $T(0, \varphi_1) = \frac{a^2 \varphi_1^3}{6}$.

22. $T(0, \varphi_1) = \frac{a^2}{4}\left[\operatorname{arctg} \omega_1 - \frac{\omega_1}{1+\omega_1^2}\right] = \frac{1}{4}\left[(a^2 - r_1^2)\,\omega_1 - a^2\varphi_1\right]$.

26. $T = 10{,}28$.

γ 2. $T\left(a, \frac{1}{a}\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$; 3. $T\left(a, \frac{1}{a}\right) = \frac{3}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$.

4. $T\left(a, \frac{1}{a}\right) = \frac{n+1}{2(n-1)}\left(a^{n-1} - \frac{1}{a^{n-1}}\right)$.

4. §. Ívhossz-számítás

α 5. $s(0, 4) = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$. 6. $s(a, x_1) = \frac{x_1^3}{6a^2} - \frac{a^2}{2x_1} + \frac{a}{3}$.

7. $s(0, a) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$. 8. $s\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

9. $s\left(0, \frac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{1}{2}$. 10. $s(\sqrt{3}, \sqrt{8}) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

11. $s(0, x_1) = \frac{x_1 + 3a}{3}\sqrt{\frac{x_1}{a}} = 2\sqrt{ax_1} + y_1 = \sqrt{\frac{4}{3}x_1^2 + y_1^2}$.

12. $s(0, b) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}}\right)$. 13. $s(1, a+1) = \frac{a(a+2)}{2}$.

14. Az értelmezési tartomány a $[0, 1]$ intervallum, ezért az integrációs határok: $x_a = 0$, $x_f = 1$. $s = 2$.

15. Az értelmezési tartomány itt a $[-1, 1]$ intervallum. $s = 8$.

16. $s = \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$. 17. $s(1, e) = \frac{e^2 + 1}{4}$.

18. $s(0, x_0) = x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2x_0}}}{1 + \sqrt{2}}$.

19. $s(a, b) = \ln \frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1} + a - b$.

20. $s(0, x_1) = y_1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{a\,x_1^2}$; $s(0, a) = \frac{9}{8}a$.

21. $s(0, x_1) = a \ln \frac{a + x_1}{a - x_1} - x_1.$ 22. $s(0, x_1) = 2a \ln \frac{a}{a - x_1} - x_1.$

24. $x \approx 3{,}4.$ 25. $x \approx 4{,}8.$

β) 7. $s(0, 1) = \frac{5}{2}$; $s(0, t_1) = \frac{t_1}{2}(4 + t_1).$

8. $s\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right).$ 9. $s(a, b) = 2(e^b - e^a).$

10. $s(0, a) = \frac{1}{8}\left[\ln\left(2a + \sqrt{4a^2 + 1}\right) + 2a\sqrt{4a^2 + 1}\right].$

11. $s(0, t_1) = \frac{1}{27}\left[\sqrt{(4 + 9t_1^2)^3} - 8\right].$ 12. $s(0, t_1) = a\frac{t_1^2}{2}.$

13. $s(0, \pi) = \frac{\pi^3}{3}.$ 14. $s = 5a\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right].$

15. $s\left(\frac{\pi}{2}, t_1\right) = a \ln\frac{a}{y_1}$, ahol y_1 a t_1 paraméterértéknek megfelelő y érték.

16. $s(0, \ln a) = \ln a + \frac{a^2 - 1}{4a}$. Megoldás közben felhasználjuk az $1 + \operatorname{ch} t = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}$ azonosságot!

17. $s(0, t_1) = \frac{a + b}{2} t_1 + \frac{a - b}{2} \sin t_1 \cos t_1$; $s(0, 2\pi) = (a + b)\pi.$

18. $s(0, t_1)$ és $s(0, 2\pi)$; mint előbb.

19. $s(0, t_1) = a\left(t_1 + \frac{t_1^3}{3}\right).$ 20. $s(0, t_1) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsh} t_1 + t_1\sqrt{t_1^2 + 1}\right).$

21. $s(t_1, t_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arch} t_2^2 - \operatorname{arch} t_1^2\right).$

γ) γ_1) 6. $s(0, \varphi_1) = a\varphi_1 - r_1.$

7. $s = \left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] p.$ 8. $s = \frac{3\pi a}{2}.$ 9. $s(0, t_1) = \sqrt{2}\, a\left(e^{\arcsin t_1} - 1\right).$

10. $s\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = a\left[\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right].$

γ_2) 12. $s(a, r_1) = a \ln\frac{r_1}{a}.$ 13. $s(a, r_1) = \frac{r_1^2 - a^2}{4a} + \frac{a}{2}\ln\frac{r_1}{a}.$

5. §. Térfogatszámítás

b)

α | 6. $V(0,3) = \frac{4a\,b^2\,\pi}{3}$.

7. $V(0, m) = a^2\pi\, m = t_a \cdot m$.

8. $V(0, m) = \frac{a^2\pi\, m}{3} = t_a \cdot \frac{m}{3}$.

9. $V(0, a) = \frac{a^3}{2}\left(\pi + \frac{\text{sh}\, 2}{2}\right)$.

10. Először is kiszámítjuk a forgásparaboloid köbtartalmát: $V_P(0, a) = \pi \int_0^a x\, dx = \frac{a^2\pi}{2}$. Utána kiszámítjuk a körülvevő henger térfogatát: $V_H = (\sqrt{a})^2\pi \cdot a = a^2\pi$, mivel az alapkör sugara az $x = a$ helyhez tartozó $\sqrt{a}$ ordináta, magassága a. Ezekután észlelhető, hogy: $V_P = \frac{V_H}{2}$.

11. $V = \frac{h\,\pi}{3}\,\frac{R^3 - r^3}{R - r}$.

12. $V \approx 1{,}54\,\pi$.

13. $V \approx 11{,}4\,\pi$.

14. $V_x(0, 2) = \frac{\pi}{4}(e^8 - 1)$.

15. $V_x(1, 4) = \pi \ln 4$.

16. $V_x(1, 2) = \frac{127}{63}\,\pi$.

17. $V_x(1, 3) = 5{,}3\,\pi$.

18. $V_x(-1, 1) = \frac{16\pi}{15}$.

19. $V_x(0, 3) = 12\pi$.

20. $V_x(1, 4) \approx 0{,}73\,\pi$.

21. $V_x(0, \pi) = \frac{3\pi^2}{8}$.

22. $V_x(1, 3) = 6\pi$.

23. $V_x(-\infty, 0) = \frac{\pi}{4}$. $V_x(0,1) = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

24. $V_x(1, 3) \approx 3{,}24$.

26. $V_y(0, 3) \approx 3{,}73\,\pi$.

27. $V_y(1, 4) = \pi \ln 4$.

28. $V_y(1, 2) \approx 8{,}6\,\pi$.

29. $V_y(0{,}5,\ 1{,}5) = 0{,}5\,\pi$.

30. $V_y(1, 3) = 0{,}5\,\pi$.

31. $V_y(1, 3) \approx 6{,}6\,\pi$.

32. $V_y(1, 4) \approx 0{,}73\,\pi$.

33. $V_y(2, 4) = \frac{26}{81}\,\pi$.

34. $V = 0{,}6$.

35. $V = \pi\, r^3\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right)$.

36. $V = 2\pi$.

37. 1) $V_a = \frac{4}{3}\pi ab^2$; 2) $V_b = \frac{4}{3}\pi a^2 b$;

3) ha speciálisan $a = b = r$, akkor: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

38. Először is felírjuk a parabola egyenletét, mely a $P_1(-a, 0)$, $P_2(0, h)$ és $P_3(a, 0)$ pontokon átmegy. Majd a képlet szerint számítjuk az

$$\int_{-a}^{+a} y^2\,dx \text{ integrált. } V = \frac{8}{15}\pi h^2 a.$$

39. $V = \frac{\pi h^3}{3}(3a + h)$ [az integrálás határai a és $a + h$].

40. Integrációs határok $x = 0$ és $x = 1$. $V(0, 1) = \pi(e - 2)$.

41. $V(a, b) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b} - e^{-2b}}{2} - \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{2} + 2(b - a)\right]$.

42. Először is megállapítjuk az integrációs határokat; majd térfogatok különbségével számolunk. $V = \frac{3\pi}{10}$.

43. Az integrációs határok $x = 0$ és $x = 3$ (a függvény zérushelyei);

$V = \frac{\pi}{2}(15 - 16\ln 2)$. 44. $V(0, 1) = \pi\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)$.

45. Először is fejezzük ki y^2-et (a másodfokú egyenlet megoldó képlete segítségével), majd integráljuk a $[-a, a]$ szakaszon.

$$V = \frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3}\right].$$

46. 1) Az integrációs szakasz nyilván $[-a, a]$, de a párosság miatt integrálhatunk a $[0, a]$ szakaszon is; $V = \frac{2}{3}\pi a^2$.

2) Az integrálás határai láthatóan $x = 0$ és $x = 1$; $V = \frac{\pi^2}{16}$.

47. A $\pi\int_a^b y^2(x)\,dx = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\,\dot{x}(t)\,dt$ formula alapján számolunk. $V = 5\pi^2 a^3$.

48. L. az előző példa útmutatását. $V = \frac{16\pi c^6}{105\, a b^2}$.

49 Az y tengely körüli megforgatás esetén $V_y = \int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy$; itt célszerű $dy = y'\,dx =$ $= \cos x\,dx$ kifejezéssel dolgozni; így:

$$V_y = \int_0^{\pi} x^2 \cos x\,dx = 2\pi^2 .$$

50. Mivel az aszimptóta az x tengely, $V_x = \pi \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\pi \operatorname{arctg} a$.

51. $V = \frac{1}{2}\pi e$.

55. Toljuk el az y tengelyt az $x = a\pi$ abszcisszájú pontba, s a ciklois egyenletét e koordinátarendszerben írjuk fel, majd forgassunk az y tengely körül. $V = \pi a^3 \left(\frac{3\pi^2}{2} - \frac{8}{3}\right)$.

56. $V = 4\pi\sqrt{2}$.

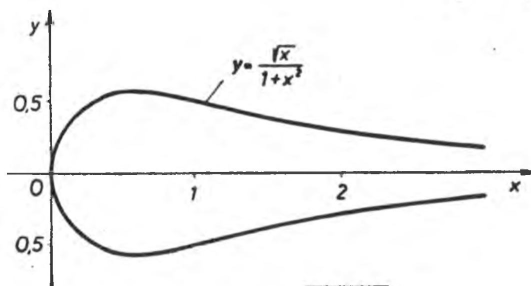
57. *a)* $V = \pi$. *b)* Hozzuk a $\sqrt{2}x = t$ helyettesítéssel a megadott alakra; továbbá a párosság miatt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt; \text{ így: } V = \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}} .$$

58. $V = \frac{3\sqrt{2\pi}}{32}$.

59. Parciálisan integrálunk $\frac{1}{x^2} = v'$ és $\sin^2 x = u$ választással, majd a $\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]$ kifejezés határértékét vesszük, ez nyilván 0, akár $x \to \infty$, akár $x \to 0$ esetén. (Ez a *L'Hospital* szabály által — vagy egyszerű kiemelés útján is — könnyen ellenőrizhető). A második integrálra használjuk a szövegben említett eredményt. $V = \pi^2$.

60. Ha $t_a = \frac{\pi}{2}$-től $t_f = \pi$-ig integrálunk, az eredmény: $\frac{a^3\pi}{3}$.



189. ábra

A görbe az y tengelyre szimmetrikus, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, így a teljes térfogat:

$V = \frac{2}{3} a^2\pi$.

66. L. a 189. ábrát.

c)

α 4. $V = \frac{11a^4}{12}$. 5. $V = \frac{3a^3}{8}$. 6. $V = r^3\frac{\pi}{2}$.

7. $V = ab\left(h + \frac{2s}{3}\right)$.

β 5. $V = \frac{8a^5}{15}$.

γ' 3. $V = \frac{16}{3}R^3$.

d)

γ 3. $V = \frac{2}{3}abH = 133\frac{1}{3}\text{ cm}^3$. 4. $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$

5. $V_1 = \frac{R^2 H}{6}\left(\pi + \frac{4}{3}\right)$; $V_2 = \frac{R^2 H}{6}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$, ahol V_1 a nagyobbik rész térfogata.

6. $V = \frac{8}{3}a^3$.

7. Írjuk fel a térfogat differenciálját! Ez esetben a keresztmetszet (lévén az előző példában a húr oldal, itt pedig átló) az előzőnek $\frac{1}{\sqrt{2}}$-szerese; mivel a terület az oldal négyzete, így $T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2 = \frac{a^2}{2}$, vagyis az előbbi fele! Ennek megfelelően: $V_2 = \frac{V_1}{2}$.

8. Az előbbi példához hasonló gondolatmenettel oldjuk meg. A zabályos háromszög magassága $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ lévén, a keresztmetszet: $T = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, vagyis az integrál a 6. példabelinek $\frac{\sqrt{3}}{2}$-szerese!

9. $V = \frac{8}{3}\pi r^3$. 10. $V = \frac{4}{3}R^2 H$.

6. §. Felszínszámítás

b)

α 8. $F = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon}$ (ε az ellipszis excentricitása).

14. $F = 31$. 15. $F \approx 5{,}3$.

16. $F = \frac{56}{3}\pi a^2$. 17. $F = \frac{\pi}{9}\left(\sqrt{(1+a^4)^3} - 1\right)$.

18. $F = \frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$. 19. $F = 2\pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$

20. $F = \pi \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{5} + 1}\right]$. 21. $F = 3\pi a^2$.

22. Válasszuk x' tengelynek a húrt, az y' tengely legyen a $(0, r)$ pontban rá merőleges; ezen elforgatott és eltolt koordinátarendszerben írjuk fel a kör egyenletét; ez nyilván:

$$\left(y' + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(x' - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2. \qquad F = \pi a^2 \sqrt{2}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

23. $F = \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi} - 2)$. 24. $= \frac{12}{5}\pi a^2$.

25. Toljuk el a koordinátarendszert úgy, hogy az y tengely egybeessék az $x = \pi a$ egyenessel. Ebben a ciklois egyenlete nyilván: $x = a(t - \sin t - \pi)$, $y = a(1 - \cos t)$. Most forgassuk ezen új tengely körül.

$$F = 8\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

26 $F = 4\pi^2 a^2$. 27. $F = 2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$.

28. $F = \pi [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.

29. $F = 4\pi a^2$. Az integrálás határai nyilván $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{\pi}{2}$, mivel $t = \frac{\pi}{2}$ esetén $x = 0$. $t = \pi$ esetén $x \to \infty$. A párosság miatt a teljes traktrix alatti terület ennek kétszereseként számítható. $\left[\text{A } (-\infty, 0] \text{ intervallum a } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}\text{-nek felel meg.}\right]$

30. $x \approx 2{,}12$. 31. $a \approx 2{,}6$.

β

7. $F_y(0, y_1) = \frac{bc}{16a^2}\left[(8y_1^2 - 3a^2)\arcsin\sqrt{\frac{y_1}{a}} + (3a + 2y_1)\sqrt{y_1(a - y_1)}\right]$;

$$F(0, a) = \frac{5bc\pi}{32}.$$

8. $F(0, y_1) = \frac{bc}{4a^2}\left[2y_1^2 \arccos\frac{y_1}{a} + a^2 \arcsin\frac{y_1}{a} - y_1\sqrt{a^2 - y_1^2}\right]$; $F(0, a) = \frac{bc\pi}{8}$.

γ

10. $F(0, x_1) = y_1 z_1$.

11. $y\sqrt{1 + z'^2} = b^3 \frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2}$; $F(0, x_1) = x_1 y_1$. 12. $F(0, x_1) = \frac{bx_1^2}{2a}$.

13. $F(0, x_1) = \dfrac{bx_1 (2a + x_1)}{2a}$; $F(0, a) = \dfrac{3}{2} ab.$

14. $F(0, x_1) = b\left(a - \sqrt{a^2 - x_1^2} + a \arcsin \dfrac{x_1}{a}\right)$; $F(0, a) = ab\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

15. $F(0, x_1) = b\left(a \arcsin \sqrt{\dfrac{x_1}{a}} - \sqrt{x_1(a - x_1)}\right)$; $F(0, a) = \dfrac{ab\,\pi}{2}$.

16. $F(0, x_1) = \dfrac{bx_1}{a^2}\left(a^2 + \dfrac{x_1^2}{3}\right)$; $F(0, a) = \dfrac{4a\,b}{3}$.

FELHASZNÁLT IRODALOM

MATEMATIKAI

1. *Г. М. Фихтенльгоц*: Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II и III; Огиз-Гостехиздат, 1948, Москва—Ленинград.

2. *A. F. Bermant:* Matematikai analízis I. rész; fordítás; Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

3. *Г. Н. Берман:* Сборник зад ч по курсу математического анализа, изб. 3; Гозтехиздат, 1951, Москва—Ленинград.

4. *H. M. Gjunter—R. O. Kuzmin:* Felsőbb matematikai példatár II. rész; fordítás; Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.

5. *W. A. Granville—P. F. Smith—W. R. Longley:* Elements of the Differential and Integral Calculus, Rev. Edition; Ginn and Company, Boston, 1941.

6. *R. Schlömilch:* Aufgabensammlung zu Analisis II.

7. *Н. Н. Лузин*: Интегральное исчисление изд. 3; Советская наука, 1952, Москва.

8. *А. И. Погорелов*: Сборник задач по высшей математике; Учпедгиз 1951, Москва.

9. *Б. П. Демидович:* Сборник задач и упражнений по математическому анализу; Гостехиздат, 1952. Москва—Ленинград.

10. *Szász Pál:* A differenciál- és integrálszámítás elemei I—II., 2. kiadás; Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951.

11. *Stachó Tibor:* Felsőbb mennyiségtan, 2. kiadás; Budapest, 1942.

12. *R. Rothe:* Höhere Matematik. Teil II. u. IV—3/4; 7-te, bzw. 4-te Auflage; B. G. Teubner, Leipzig, 1951, bwz. 1949.

13. *B. Baule:* Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Band I; 7. Auflage; S. Hirzel, Leipzig, 1950.

14. *M. Lindov:* Integralrechnung; B. G. Teubner, Leipzig, 1951.

15. *Rényi Alfréd:* Valószínűségszámítás; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme Budapest, 1952.

16. *Г. П. Воев*: Теория вероятностей; Гостехиздат, 1950, Москва—Ленинград.

17. *Pachné:* Gyakorlatok *Gallai:* Matematika c. előadásához; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest, 1953.

18. *Alexits—Fenyő:* Matematika vegyészek részére; Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

MŰSZAKI

1. *Békéssy—Freud—Marx—Nagy:* Elméleti fizikai feladatok; Tankönyvkiadó, Budapest 1951.

2. *Kövesi Antal:* Hidraulika és gyakorlati példák gyűjteménye; Népszava, Budapest, 1946.

3. *В. С. Яблонский—В. П. Яблонская*: Сборник задач по технической гидротехнике; Гостехиздат 1951, Москва—Ленинград.

4. *Н. И. Иванов*: Сборник задач по сопротивлению материалов, изд. II; Гостехиздат, 1951, Москва—Ленинград.

5. *Muttnyánszky Ádám*: Szilárdságtan I. és II. rész; Budapest, 1948.

6. *П. Л. Калантаров—Л. Р. Нейман*: Теоретические основы электротехники; изд. 3: Госэнергоиздат, 1951, Москва—Ленинград.

7. *Verebély László*: Villamos művek I. és II. kt., 2. kiadás; Tankönyvkiadó Budapest, 1952.

8. *Gruber—Blahó*: Folyadékok mechanikája; Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

9. *Verebély—Csáki*: Villamos vasutak I. rész: Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest' 1952.

10. *Szentmártony Tibor*: Matematikai statisztika a műszaki gyakorlatban: Tudományos Könyvkiadó N. V., Budapest, 1950.

11. *Menge—Schrieder*: Mechanik—Aufgaben III; Fachbuchverlag GMBH, Leipzig, 1951.

12. *В. И. Феодосев*. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов; Гостехиздат, 1950, Москва—Ленинград.

13. *Németh—Muszkalav—Papházi—Szabó*: Csatornázás: Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest.

14. *Németh*: Ivóvízellátás; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest.

15. *Kézdy Árpád*: Talajmechanika I.; Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.

16. *Németh*: Hidrológia; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest.

17. *Németh*: Mezőgazdasági vízhasznosítás: Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest.

18. *Kézdy*: Földművek; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító Üzeme, Budapest.

19. *Herrmann Miksa*: Gépelemek; Németh József, Budapest, 1924.

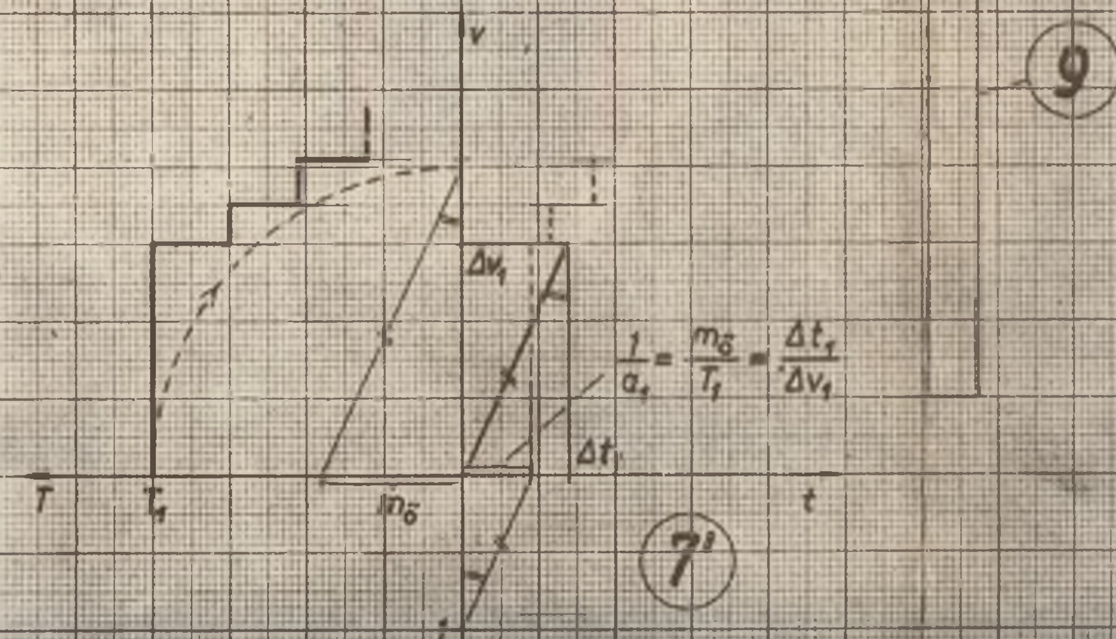
20. *К. А. Круг*: Основы электротехники: Госэнергоиздат, 1952, Москва—Ленинград.

21. *Széchy Károly*: Alapozás I—II.; Közlekedési Kiadó, Budapest, 1952.

22. *Pelikán*: Matematika építészmérnök hallgatók részére; Tankönyvkiadó Jegyzetsokszorosító üzeme, Budapest.

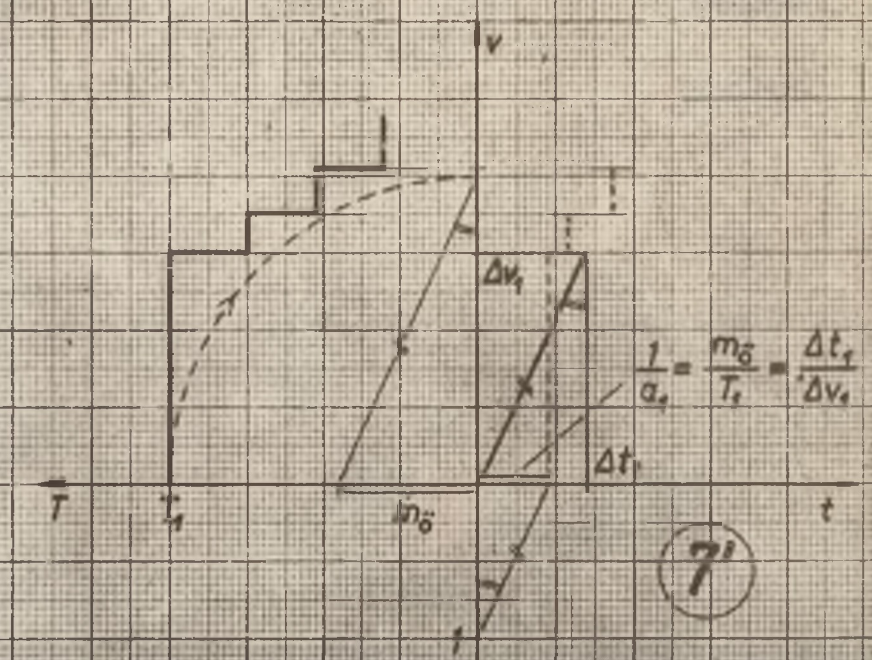
73-373 – DABASI NYOMDA
Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: dr. Vágvölgyi Tibor igazgató
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki vezető: Hámori József
Műszaki szerkesztő: Szák András
A kézirat nyomdába érkezett: 1973. február. Megjelent: 1973. május
Példányszám: 2000. Terjedelem: 23,75 (A/5) ív, 189 ábra + 1 melléklet
Készült: az 1968. évi harmadik kiadás alapján, könyvről fotózva,
rotaprint eljárással, az MSZ 5601-59 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint
Raktári szám: 44131/V *

MENETDIAGRAMM



1. Vonóerő a kerékkarimán $K(v)$
2. Menetellenállás $E(v)$
3. Gyorsítóerő a síkpályán $T(v)$
3'. —"— a „c" kanyarban $T(v)$
4. —"— az „a" emelkedőn $T(v)$
5. —"— a „g" —"— $T(v)$
6. —"— az „f" lejtőn $T(v)$
7. Sebesség $v(t)$
7'. Magyarázó ábra
8. Út $s(t)$
9. Gyorsulás $a(t)$
10. Teljesítmény a kerékkarimán $N(t)$
11. —"— négyzete $N^2(t)$
12. Vonó- és fékerő $K(s) = T(s) + E(s) + E_i(s)$
13. Menet- és pályaellenállás $E(s) + E_i(s)$
14. Gyorsító- és lassítóerő $T(s)$

MENETDIAGRAMM



erő a kerékkarimán $K(v)$

etellenállás $E(v)$

sítóerő a síkpályán $T(v)$

—"— a „c" kanyarban $T(v)$

—"— az „a" emelkedőn $T(v)$

—"— a „g" —"— $T(v)$

—"— az „f" lejtőn $T(v)$

esség $v(t)$

(7') Magyarázó ábra

(8) Út $s(t)$

(9) Gyorsulás $a(t)$

(10) Teljesítmény a kerékkarimán $N(t)$

(11) —"— négyzete $N^2(t)$

(12) Vonó- és fékerő $K(s) = T(s) + E(s) + E_i(s)$

(13) Menet- és pályaellenállás $E(s) + E_i(s)$

(14) Gyorsító- és lassítóerő $T(s)$

44131 A.V.*-1. tábla